Luísa Adélia Lopes

Licenciada em Ensino da Matemática

Aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações no 8.º ano com Recurso à Calculadora Gráfica

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

Orientador: Professor Doutor António Manuel Dias Domingos, Professor Auxiliar, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa

Júri:

Presidente: Prof. Doutora Maria Helena Coutinho Gomes de Almeida Santos
Arguente: Prof. Doutora Ana Elisa Esteves Santiago
Vogal: Prof. Doutor António Manuel Dias Domingos

FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

setembro 2014

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Professor Doutor António Domingos pela forma como orientou o meu trabalho, pela disponibilidade que sempre manifestou, pelas palavras de incentivo, sugestões e ensinamentos.

À Escola Básica e Secundária Mestre Domingos Saraiva, nomeadamente aos membros da Direção, pela confiança e abertura demonstradas.

À professora de Matemática, Odete Oliveira, pela disponibilidade e amizade.

Aos alunos envolvidos neste estudo e respetivos Encarregados de Educação, pela simpatia e disponibilidade em colaborar.

À *Texas Instruments*, pela disponibilidade das calculadoras gráficas.

Às pessoas que me acompanharam e incentivaram na realização deste estudo.

À minha família, um obrigado muito especial.

À minha FILHA …

RESUMO

Este estudo, realizado no 8.º ano de escolaridade, tem como principal objetivo compreender como a calculadora gráfica medeia a aprendizagem das Funções e dos Sistemas de Equações. Foca-se na aprendizagem que os alunos fazem destes conceitos, na relação que estabelecem entre as várias representações e no modo como utilizam a calculadora gráfica na realização das tarefas propostas.

Ao longo deste estudo, procura-se responder às seguintes questões:

Como é que os alunos usam a calculadora gráfica na resolução de tarefas que envolvem Funções e Sistemas de Equações?

Como é que os alunos integram o uso de diferentes representações do conceito de Função?

Qual o papel deste artefacto enquanto mediador das aprendizagens?

Far-se-á o enquadramento teórico baseado na literatura de referência, no que respeita ao processo de apropriação da calculadora gráfica por parte dos alunos; à álgebra e ao pensamento algébrico; às Funções e diferentes representações; aos Sistemas de Equações; à calculadora gráfica; ao papel do professor; às tarefas e à modelação matemática.

Seguiu-se uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, baseada num estudo de caso referente a alunos com desempenhos académicos distintos.

A recolha de dados foi baseada na observação de aulas, nos registos escritos pelos alunos e na análise dos procedimentos recolhidos das calculadoras gráficas ao longo da realização das tarefas propostas.

A investigadora assumiu, essencialmente, o papel de observadora participante.

Da análise dos dados pode constatar-se que no seu trabalho com Funções e Sistemas de Equações, os alunos, optam muitas vezes pelo uso da calculadora gráfica, nomeadamente em questões relacionadas com a representação gráfica, no entanto, conseguem usar de forma eficaz as várias representações.

As conclusões alcançadas apontam sobretudo para uma forma diferente de olhar estes temas quando a abordagem é feita através de várias representações com recurso à calculadora gráfica. Esta ferramenta, além de ser utilizada de diferentes modos, desempenhou um papel fundamental como mediadora das aprendizagens desenvolvidas.

Palavras Chave: Teoria da Atividade, Génese Instrumental, Calculadora Gráfica, Funções, Sistemas de Equações, Representações, Tarefas

ABSTRACT

This study, undertaken in the 8th grade, aims to understand how the graphic calculator mediates the learning of functions and systems of equations. It focuses on the learning that students do from these concepts, the relationship established between the various representations and how they use the graphic calculator when carrying out the tasks.

Throughout this study, we seek to answer the following questions:

How do students handle the graphic calculator in the resolution of tasks that involve functions and systems of equations?

How do students integrate the use of different representations of the concept of function?

What is the role of this artifact as a mediator of learning?

A theoretical framework will be undertaken based on the reference literature, regarding the process of appropriation of the graphic calculator by students; the algebra and algebraic thinking; the functions and different representations; the systems of equations; the graphic calculator; the teacher's role ; the tasks and mathematical modeling.

A qualitative research methodology was followed, based on a case study related to students with different academic outcomes.

The collection of the data was based on classroom observation, on the records written by the students and on the analysis of the procedures recollected from the graphic calculators throughout the proposed tasks.

The searcher essentially assumed the role of a participating observer.

From the data analysis we can see that, when working with functions and equations, students often opt for the use of graphic calculators, mainly on issues related to graphical representation, nevertheless, they can use the various representations effectively.

The reached conclusions all point to a different way of looking at these issues when the approach is made through several representations using the graphic calculator. This tool besides having been used in different ways performed an important role as a mediator of the carried out learning.

Key words: Activity Theory, Instrumental Genesis, Graphic Calculator, Functions, Systems of Equations, Representation, Task

ÍNDICE DE MATÉRIAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE ANEXOS

1. INTRODUÇÃO

Este capítulo contempla a relevância do estudo sobre a aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações no 8.º ano de escolaridade com recurso à calculadora gráfica, enuncia os objetivos e as questões de investigação e apresenta a estrutura da tese.

1.1. Relevância do estudo

Os professores, no geral, e os que lecionam a disciplina de Matemática, em particular, deparam-se frequentemente com a desmotivação e indisponibilidade dos alunos para a aprendizagem. Além de ser vista como uma disciplina difícil e que não está ao alcance de todos, a Matemática, aparece muitas vezes associada ao insucesso escolar.

As causas que, frequentemente, são apontadas como contribuintes para o insucesso são variadas. Destacam-se as caraterísticas da disciplina; a escola e sistema de ensino; a sociedade; o aluno; a família e os professores.

No entanto, Ponte (1994), considera que:

> é fundamental perceber-se que não são as características supostamente intrínsecas e "imutáveis" da Matemática que constituem a principal razão de ser do agravamento do insucesso nesta disciplina mas sim o papel social que lhe é atribuído, o modo como com ela se relacionam os diversos atores e é por eles vista. Para combater esse insucesso a principal medida passa por alterar este papel, retirando-lhe a função seletiva e mostrando como esta ciência pode constituir — para todos — uma actividade intelectual gratificante e enriquecedora (p. 5).

Como professora de Matemática, consciente de que é necessário melhorar o desempenho dos vários intervenientes, tenho como principal preocupação diagnosticar as dificuldades que os alunos apresentam nesta disciplina e, no que respeita ao domínio da Álgebra e das Funções, em particular. Questiono muitas vezes as abordagens e as metodologias utilizadas e tento implementar estratégias que visem o desenvolvimento de competências e a motivação dos alunos para a aprendizagem. Foi neste sentido que me interessei por compreender de que forma a utilização da calculadora gráfica, podia vir a influenciar a dinâmica de sala de aula e melhorar a prática letiva.

Esta preocupação é partilhada por vários autores pelo que têm desenvolvido trabalhos no sentido de contribuir para uma aprendizagem mais eficaz destes temas.

No que respeita à Álgebra, destacam-se Kaput (1999) e Ponte, Branco & Matos (2009). Os trabalhos do primeiro autor centram o ensino deste tema no desafio de encontrar formas de ensinar para que sejam criados ambientes de sala de aula que permitam aos alunos uma aprendizagem com compreensão.

Ponte, Branco & Matos (2009) apresentam os principais aspetos do desenvolvimento histórico da Álgebra; discutem o conceito de pensamento algébrico; destacam diversas orientações para o ensino da Álgebra nomeadamente aspetos de natureza curricular, abordagens didáticas e o papel da tecnologia; e ainda uma orientação para os principais tópicos da Álgebra trabalhados nos diferentes ciclos.

A importância do estudo da Álgebra também é defendida pelos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2008). Neste documento, a Álgebra é considerada um fio condutor curricular desde os primeiros anos de escolaridade, onde o professor deve selecionar e apresentar tarefas que maximizem o potencial de aprendizagem do aluno, ajudando-o a criar uma base sólida assente na sua compreensão e nas suas experiências.

Considerando a diversidade de alunos que presentemente existe e em benefício da sua aprendizagem, a maioria dos professores tem adotado diversas estratégias e implementado nas suas atividades letivas variados recursos e materiais, nomeadamente as tecnologias.

No que respeita à implementação das tecnologias no ensino da matemática, o NCTM (2008) refere que:

> A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos. As tecnologias eletrónicas - calculadoras e computadores - constituem ferramentas essenciais para o ensino, a aprendizagem e o fazer matemática. Proporcionam imagens visuais das ideias matemáticas, facilitam a organização e a análise de dados, e realizam cálculos de forma eficaz e exata. Poderão servir de apoio a investigações levadas a cabo pelos alunos, em qualquer área da matemática (…) (p. 26-27).

De entre as tecnologias mencionadas, destaca-se a calculadora gráfica. Foi introduzida como um recurso importante no Ensino Secundário desde a implementação do Programa Ajustado de Matemática (DES, 1997) e o seu uso continuou a ser considerado indispensável no Programa de Matemática A (DES, 2001). No Ensino Básico, o Programa Matemática, (ME, 2007), recomenda que

> ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objetos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objetivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados. A calculadora e o computador não devem ser usados para a realização de cálculos imediatos ou em substituição de cálculo mental (p. 10).

Embora este documento refira as calculadoras, não é explícito, neste ciclo de ensino, o uso da calculadora gráfica, no entanto, documentação oficial do Ministério da Educação e Ciência (IAVE) divulga informação relativa à Prova Final do 3.º Ciclo onde são referidas as características das calculadoras passíveis de serem utilizadas nas provas finais do Ensino Básico: "Calculadora – aquela com que trabalha habitualmente (gráfica ou não)…" (S-DGIDC, 2011 - 2013).

Ao contrário do que se tem verificado para o Ensino Secundário, até ao momento, pouca investigação tem sido realizada de modo a compreender como é que a calculadora gráfica pode ser integrada na aprendizagem da Matemática ao nível do 3.º ciclo do Ensino Básico, em particular na aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações. Por este motivo, considera-se pertinente compreender o modo como estes alunos se apropriam desta ferramenta e de que modo a utilizam na execução de determinada tarefa bem como a influência que esta pode ter na qualidade das aprendizagens realizadas.

Atendendo aos vários modelos de calculadoras gráficas que têm surgido ao longo dos anos e às potencialidades apresentadas por cada um deles, considera-se oportuno averiguar quais as vantagens que estas ferramentas podem trazer para a melhoria das aprendizagens na disciplina de Matemática, no 3.º ciclo de escolaridade.

Algumas das vantagens são referidas num estudo de Semião e Canavarro (2012) onde as autoras referem Dunham & Dick (1994), Grant & Searl (1996), Demana & Waits (2000), Hennessy et al., 2001), por considerarem que:

> a utilização da calculadora gráfica, dá origem a uma nova dinâmica de sala de aula, confere ao aluno maior autonomia na construção do seu saber, permite maior envolvimento dos alunos nas atividades da aula, facilita a ligação entre as várias representações e uma melhor compreensão das mesmas (p.2).

Apesar da diversidade de conteúdos que podem ser trabalhados com recurso à calculadora gráfica, este estudo irá incidir na aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações no 8.º ano de escolaridade, por se considerar que estes conceitos são de grande importância e acompanham os alunos ao longo do seu percurso escolar.

Destinando-se esta unidade de ensino a alunos que se encontram a frequentar o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), serão tidos em especial atenção os objetivos e indicações metodológicas do referido programa, as normas elencadas no (NCTM, 2008), as orientações curriculares da brochura Álgebra no Ensino Básico (Ponte, Branco & Matos, 2009), a importância da Matemática na Educação Básica (Abrantes, Serrazina & Oliveira 1999), entre outros.

Começando por destacar a importância que é dada ao conceito de Função, esta é referida por Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999), devido ao seu papel unificador.

No Currículo Nacional do Ensino Básico (DEB, 2001) também eram apresentados aspetos a incluir na competência matemática que, os alunos deviam desenvolver ao longo de todos os ciclos, no domínio da Álgebra e das Funções:

- a aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;
- a aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar

de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos;

- a aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;
- a sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas (p. 66).

Embora seja evidente o esforço realizado no sentido de desenvolver nos alunos tais competências, estes continuam a manifestar muitas dificuldades na compreensão e aplicação do conceito de Função.

O professor tem aqui um papel fundamental, na medida em que,

> a aprendizagem da Matemática decorre do trabalho realizado pelo aluno e este é estruturado, em grande medida, pelas tarefas propostas pelo professor. (…) Deve propor aos alunos a realização de diferentes tipos de tarefas, dando-lhes uma indicação clara das suas expectativas em relação ao que espera do seu trabalho, e apoiando-os na sua realização. Para além da realização das tarefas propriamente ditas, o ensino e aprendizagem tem de prever momentos para confronto de resultados, discussão de estratégias e institucionalização de conceitos e representações matemáticas." (ME, 2007, pp. 8-9)

Neste estudo, será incluído um conjunto de tarefas, selecionadas de forma a contribuírem para a aprendizagem dos tópicos: Funções e Sistemas de Equações. Essas tarefas, realizadas individualmente ou em grupo, e finalmente discutidas no grupo turma, serão objeto de avaliação formativa.

1.2. Objetivos do estudo

> A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática, influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos. (NCTM, 2008, p. 26)

Apesar da diversidade de tecnologias que existe ao alcance quer do professor, quer dos alunos, optou-se pela calculadora gráfica *TI-Nspire,* por ser esta a ferramenta utilizada pela professora em sala de aula.

Pretende-se então compreender o modo como os alunos usam a calculadora gráfica na resolução de tarefas que envolvam Funções e Sistemas de Equações e de que forma este artefacto pode permitir uma melhor compreensão desses conceitos matemáticos. Procura-se que os alunos utilizem a calculadora gráfica de forma eficiente e racional, explorem as suas potencialidades e consequentemente melhorem a sua aprendizagem.

Os principais objetivos deste estudo são:

- Identificar estratégias utilizadas e eventuais dificuldades manifestadas pelos alunos do 8.º ano de escolaridade na aprendizagem do conceito de Função bem como na resolução de Sistemas de Equações e sua aplicação;

- Analisar como os alunos se apropriam da calculadora gráfica e de que modo a utilizam;
- Compreender como a calculadora gráfica medeia a aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações.

Na sequência destes objetivos, são apresentadas as questões da investigação, para as quais se procura obter resposta ao longo do estudo:

1. *Como é que os alunos usam a calculadora gráfica na resolução de tarefas que envolvem Funções e Sistemas de Equações?*

2. Como é que os alunos integram o uso de diferentes representações do conceito de Função?

3. Qual o papel deste artefacto enquanto mediador das aprendizagens?

1.3. Apresentação e estrutura do estudo

Este estudo encontra-se organizado em seis capítulos.

No primeiro capítulo destaca-se a relevância do estudo e são definidos os objetivos e as questões de investigação.

Segue-se o capítulo dois, onde será realizado o enquadramento teórico baseado na literatura de referência sobre os temas considerados relevantes para este estudo, nomeadamente: Teoria da Atividade e abordagem instrumental, a Álgebra e o pensamento algébrico, a aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações com recurso à calculadora gráfica, estratégias e dificuldades, representações, o papel do professor, as tarefas e a modelação matemática.

No capítulo três é apresentada a metodologia utilizada ao longo do estudo. Far-se-á referência às opções metodológicas, ao contexto escolar onde decorreu o estudo bem como uma breve caracterização da turma participante e dos alunos selecionados para o estudo de caso.

No quarto capítulo serão apresentados os procedimentos adotados e os instrumentos utilizados na recolha de dados.

O quinto capítulo contempla a análise dos dados. Faz referência ao desempenho dos alunos durante a realização das tarefas propostas e apresenta uma reflexão sobre o trabalho realizado.

Finalmente, no sexto capítulo, serão apresentadas as principais conclusões do estudo.

2. REVISÃO DE LITERATURA

Ao realiza-se um estudo sobre a aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações com recurso à calculadora gráfica, existe uma panóplia de saberes dos quais se sente necessidade.

Em primeiro lugar, pretende-se que este trabalho seja sustentado em teorias sólidas que fundamentem a utilização da calculadora gráfica no estudo das Funções e Sistemas de Equações, recorrendo-se à Teoria da Atividade e a uma abordagem que integra o uso de artefactos no processo de ensino e aprendizagem.

Segue-se a importância dada à Álgebra e ao pensamento algébrico, à aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações com recurso à calculadora gráfica, às representações, às estratégias e dificuldades manifestadas pelos alunos, ao papel do professor, às tarefas e à modelação matemática.

2.1. Teoria da Atividade e a Génese Instrumental

Tendo presentes os objetivos definidos, importa compreender como os alunos se apropriam da calculadora gráfica e de que modo este artefacto medeia a aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações.

Será feita uma análise à luz da Teoria da Atividade, cujo principal representante é Vygotsky (1896-1934). Esta teoria, embora não sendo recente, tem sido utilizada para explicar o uso das tecnologias, na medida em que estas ferramentas são vistas como um instrumento mediador entre o sujeito e o objeto.

Engestrom (1999), um dos seguidores de Vygotsky, considera outros intervenientes. Aponta a comunidade, o sujeito e o objeto como os principais intervenientes do sistema de atividade, cujas interações são influenciadas pelas regras e divisão do trabalho, que embora sendo mediadores menos visíveis são considerados fundamentais.

Sendo uma teoria complexa, será especificado no diagrama seguinte a sua adaptação a este estudo, considerando como mediadores (a calculadora gráfica, as tarefas e o manual escolar) entre o sujeito (alunos do 8.º ano de escolaridade) e o objeto (Funções e Sistemas de Equações).

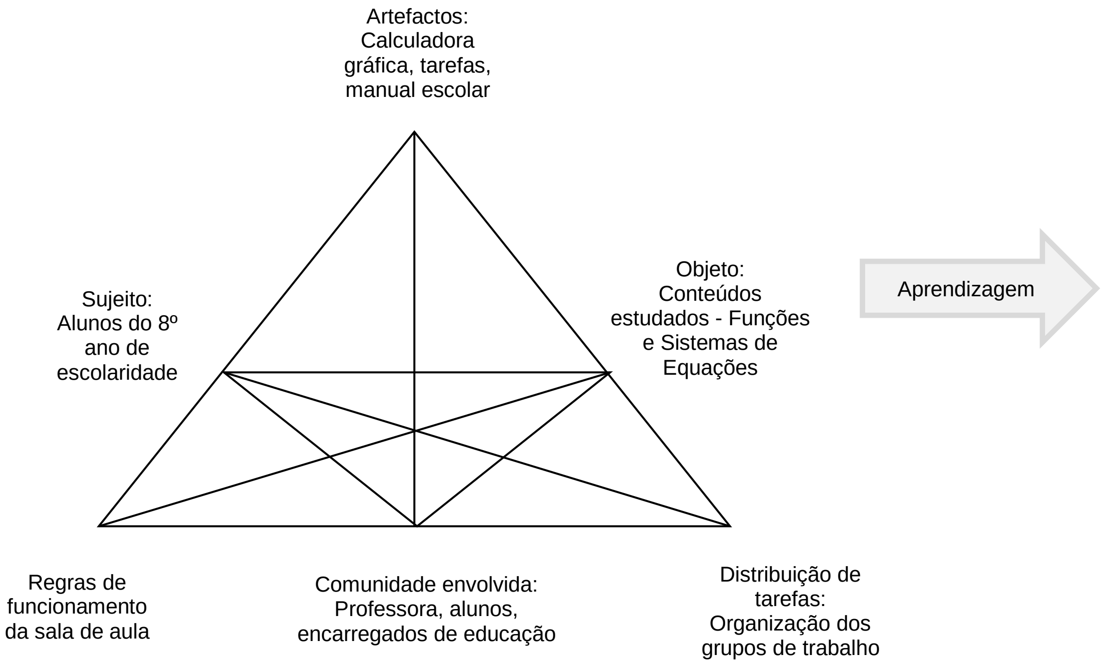


Figura 2. 1 – Modelo da atividade de Engestrom adaptado à aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações

No presente estudo, centrado na utilização da calculadora gráfica, visando a aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações por alunos do 8.º ano de escolaridade, é necessário refletir sobre o modo como essa aprendizagem se efetiva e de que forma interagem todos os intervenientes. Destacam-se os vértices superiores do triângulo onde importa compreender o conhecimento que os alunos vão adquirindo da calculadora gráfica, de que forma a utilizam na resolução das tarefas propostas e qual o papel deste artefacto enquanto mediador das aprendizagens. De seguida, consideram-se os intervenientes posicionados nos vértices inferiores cuja interação também é necessária para o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos referidos. Para compreender o processo de apropriação da calculadora gráfica, propõe-se recorrer à perspetiva da abordagem instrumental (Rabardel, 1995), que permitirá entender o desenvolvimento de esquemas emergentes da interação dos alunos com a calculadora gráfica.

Assente nas ideias de Vygotsky, Rabardel (1995), propõe um modelo que considera o instrumento como sendo um elemento intermediário entre o sujeito e o objeto, e, descreve as relações que existem entre o sujeito, o artefacto e os esquemas de utilização que compõem o instrumento. O autor considera que quando um sujeito se apropria de um artefacto e desenvolve esquemas mentais que possibilitem um modo de utilização proficiente e conhecimento das situações em que o artefacto se tornará útil, constrói um instrumento que permite a realização de determinado tipo de tarefa. Essa construção ocorre através de um processo denominado Génese Instrumental que, segundo o autor, apresenta dois movimentos: um que se dirige para o artefacto – Instrumentalização – mediante o conhecimento que estabelece, o sujeito apropria-se do artefacto e adapta-o à resolução das tarefas; e outro que se dirige para o sujeito – Instrumentação

– onde as tarefas desenvolvidas são influenciadas pelas potencialidades e pelos constrangimentos do artefacto.

O conceito de Génese Instrumental é também apresentado por Trouche (2004) através do esquema seguinte, onde os processos de instrumentação e instrumentalização se encontram interligados:

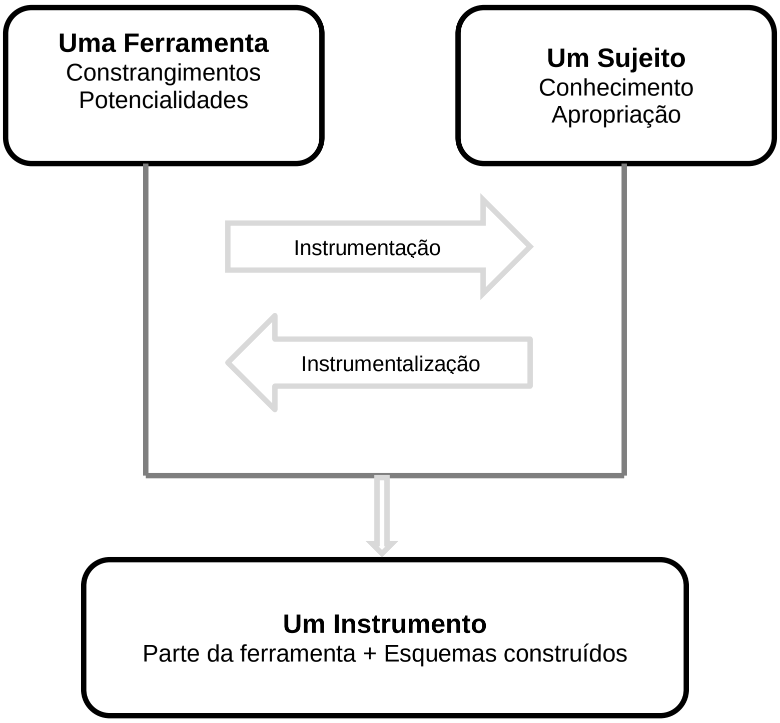


Figura 2. 2 - Esquema representativo da Génese Instrumental como uma combinação de dois processos (Trouche, 2004)

Como se pode observar, fazem parte do "nascimento de um instrumento" a ferramenta e os esquemas de utilização construídos pelo sujeito. No contexto de sala de aula, os sujeitos (os alunos) desenvolvem os seus esquemas, construindo cada aluno o seu próprio conjunto de instrumentos.

Vários autores, considerando a importância da intervenção e orientação do professor e o papel que este assume nas experiências de aprendizagem que integram as tecnologias e em particular a calculadora gráfica, desenvolveram o conceito de orquestração instrumental que explicam com o facto de este ter que dirigir uma série de instrumentos.

2.2. A Álgebra e o pensamento algébrico

No domínio da Álgebra, começa-se por referir a evolução histórica do simbolismo algébrico que segundo Kieran (1992), permitiu uma mudança de uma perspetiva processual para uma perspetiva estrutural. Nesta evolução, a autora, considera três estados de desenvolvimento:

(i) estado retórico onde a linguagem ordinária era utilizada para resolver tipos particulares de problemas sem ser utilizado qualquer tipo de símbolos para representar quantidades desconhecidas;

(ii) estado considerado da Álgebra sincopada onde foi introduzido o uso de letras para representar quantidades desconhecidas;

(iii) estado designado por Álgebra simbólica onde foi possível exprimir soluções gerais e utilizar a Álgebra como ferramenta para provar regras que determinam relações numéricas.

Importa também compreender a forma como a Álgebra tem vindo a ser considerada ao longo dos tempos.

Segundo Kaput (1999), a Álgebra tem sido ensinada e aprendida como um conjunto de procedimentos desconectados de outro conhecimento matemático e do mundo real. Os alunos memorizam procedimentos que utilizam na manipulação de símbolos e resolvem problemas sem qualquer significado em vez de lhes ser dada a oportunidade de refletir sobre os seus procedimentos e de articular o conhecimento. Este autor desafia os professores a encontrar formas de ensinar para criar ambientes de sala de aula que permitam aos alunos aprender com compreensão e sugere que:

(a) desde cedo se comece a trabalhar aspetos algébricos;

(b) a aprendizagem da Álgebra seja integrada com a aprendizagem de outros assuntos;

(c) sejam explorados os diferentes tipos de pensamento algébrico;

(d) os alunos sejam encorajados a refletir sobre aquilo que aprendem e a articulá-lo com o que já sabem;

(e) seja estimulada a aprendizagem ativa e dado ênfase à compreensão.

Considera-se importante a definição de linhas orientadoras para as mudanças que são consideradas necessárias. Cabe a cada professor geri-las da melhor forma em prol de um ensino de qualidade.

No Programa de Matemática do Ensino Básico, a Álgebra também tem o seu lugar de destaque.

> As ideias algébricas aparecem logo no 1.º ciclo no trabalho com sequências, ao estabelecerem-se relações entre números e entre números e operações, e ainda no estudo de propriedades geométricas como a simetria. No 2.º ciclo, a Álgebra já aparece como um tema matemático individualizado, aprofundando-se o estudo de relações e regularidades e da proporcionalidade direta como igualdade entre duas razões. Finalmente, no 3.º ciclo, institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica, trabalha-se com expressões, equações, inequações e Funções, procurando desenvolver no aluno a capacidade de lidar com diversos tipos de relações

> matemáticas e estudar situações de variação em contextos significativos (ME, 2007, p. 7).

São também definidos neste programa objetivos gerais de aprendizagem, onde é referido:

> Com a sua aprendizagem, no âmbito deste tema, os alunos devem:
> - ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
> - compreender o conceito de Função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade directa e inversa;
> - ser capazes de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos;
> - ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos (ME, 2007, p. 7).

E ainda é explanado o propósito principal de ensino:

> desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos (ME, 2007, p. 55).

Na perspetiva do NCTM (2008), a Álgebra não se resume à mera manipulação de símbolos uma vez que é necessária a compreensão e a atribuição de significado a esses símbolos. Para isso, os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e os princípios que regem a manipulação simbólica, e o modo como os próprios símbolos podem ser utilizados. As normas apresentadas neste documento recomendam:

> Os programas de ensino, do pré-escolar ao 12.º ano, deverão habilitar todos os alunos para:
> - compreender padrões, relações e Funções;
> - representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
> - usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas;
> - analisar a variação em diversos contextos (p. 39).

Mas especifica para cada uma destas normas, respetivamente, que:

> Do 6.º ao 8.ºanos, todos os alunos deverão:
>
> - representar, analisar e generalizar uma diversidade de padrões, através de tabelas, gráfico, palavras e, sempre que possível, expressões simbólicas;
> - relacionar e comparar diferentes formas de representação de uma relação;
> - identificar Funções como lineares ou não lineares e diferenciar as suas propriedades, a partir de tabelas, gráficos, ou equações.
> - desenvolver uma primeira compreensão conceptual das diferentes utilizações das variáveis;
> - explorar relações entre expressões algébricas e gráficos de linhas, dando particular atenção ao significado de interseção e declive;
> - usar a álgebra simbólica para representar situações e resolver problemas, sobretudo aqueles que envolvam relações lineares;

- reconhecer e produzir formas equivalentes de expressões algébricas simples, e resolver equações lineares.
- modelar e resolver problemas inseridos num contexto, utilizando diversas representações, como gráficos, tabelas e equações;
- usar gráficos para analisar a natureza das variações de quantidades em relações lineares (NCTM, 2008, p. 262).

A importância que é dada à Álgebra destaca-se em todos os documentos analisados. De facto, quando nos propomos trabalhar conceitos algébricos no 3.º ciclo do Ensino Básico é importante que os alunos estejam sensibilizados para tal. A compreensão de conceitos algébricos deve ser uma preocupação precoce para que quando chegados a este nível de ensino, os alunos sejam capazes de usá-los em diversas situações, nomeadamente na resolução de problemas.

Ponte (2006) aponta como principal objetivo da Álgebra o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Segundo o autor, este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos mas vai muito além disso.

Kaput (1999), também escreveu sobre o pensamento algébrico e considerou a existência de cinco formas de pensamento algébrico:

(i) generalização e formalização de padrões e restrições;

(ii) manipulação de formalismos;

(iii) estudo de estruturas abstratas;

(iv) estudo de Funções, relações e covariação; e

(v) utilização de variadas linguagens na modelação e no controlo de fenómenos.

No seu entender, as cinco formas relacionam-se entre si e estão sobrepostas de acordo com o esquema seguinte:

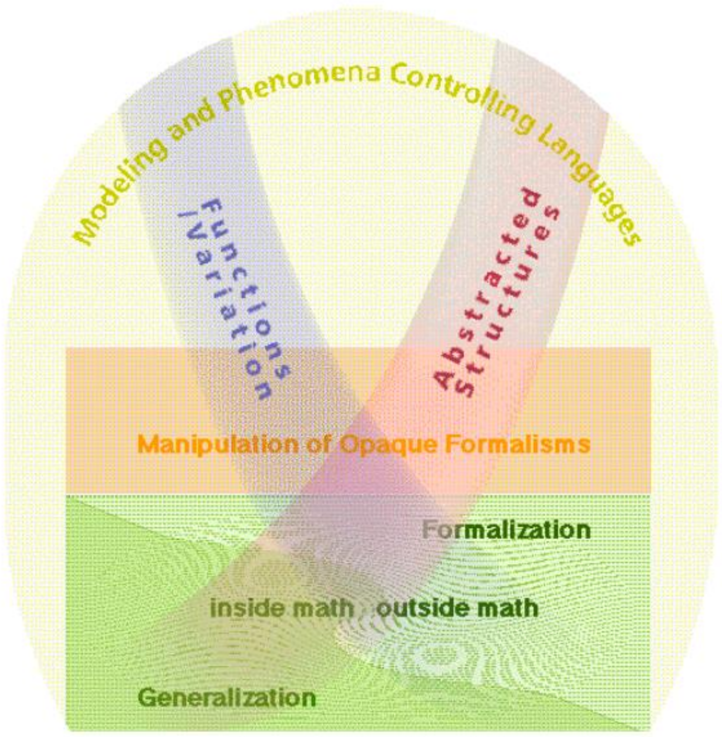


Figura 2. 3 - Sobreposição e inter-relação entre as cinco formas de pensamento algébrico (Kaput, 1999, p.5)

Neste sentido considera que o pensamento algébrico se manifesta quando, através de conjecturas e argumentos, se estabelecem generalizações sobre dados e relações matemáticas, sendo estas expressas através de linguagens formais.

Em 2008, Kaput menciona novamente os cinco aspetos considerando os dois primeiros como aspetos nucleares da Álgebra e os três últimos como ramos desse domínio (p. 5-17).

Também Ponte, Branco & Matos (2009), consideram que o pensamento algébrico inclui três vertentes:

(a) representar - que diz respeito à capacidade de utilizar diferentes representações, nomeadamente a representação simbólica;
(b) raciocinar – que privilegia o relacionar, generalizar e deduzir;
(c) resolver problemas e modelar situações (p. 10-11).

Esta linha de pensamento é também subjacente ao Programa de Matemática do Ensino Básico ao referir que os alunos devem “desenvolver a linguagem e o pensamento algébricos bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e estes serem usados na exploração e modelação de situações em contextos diversos” (ME, 2007, p. 55).

Assim, considera-se que o ensino da Álgebra e nomeadamente o desenvolvimento do pensamento algébrico devem ser motivo de preocupação ao longo de todo o percurso escolar dos alunos “uma vez que a educação algébrica se dá na medida em que a produção de conhecimento algébrico surge para organizar uma situação, como uma ferramenta e não como um objeto primário do estudo” (Abrantes, Serrazina, & Oliveira, 1999, p. 106).

2.3. A aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações com recurso à calculadora gráfica

2.3.1. Evolução do conceito de Função

O conceito de Função é considerado um dos mais importantes quer na Matemática, quer na interpretação do mundo que nos rodeia e, como refere Caraça (1951), o seu desenvolvimento deve-se ao facto de ser considerado um instrumento matemático necessário para o estudo dos fenómenos naturais.

Tem vindo a ser aperfeiçoado ao longo dos tempos e embora alguns aspetos possam ser encontrados em épocas anteriores como por exemplo nas elementares operações de contagem, o conceito como objeto de estudo surge apenas aos finais do Século XVII. Alguns dos seus principais marcos podem ser encontrados em Ponte (1990) que os sistematizou da seguinte forma:

> Newton (1642-1716), utilizava os termos “relata quantias” para designar variável dependente e “genita” para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatro operações aritméticas fundamentais.
>
> Em 1673, foi Leibnitz (1646-1716) quem primeiro usou o termo “Função” mas em termos muito gerais.
>
> João Bernoulli, em 1718, publicou um artigo onde definia Função de uma certa variável como uma quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constantes.
>
> Em 1748, Euler (1707-1783), substitui na definição de Bernoulli o termo “quantidade” por “ expressão analítica”.
>
> A noção de Função ficava assim identificada com a noção de expressão analítica que iria vigorar nos séculos XVIII e XIX.
>
> Em 1837, Dirichlet, define Função como sendo uma correspondência entre duas variáveis, tal que a todo o valor da variável independente se associa um e um só valor da variável dependente.
>
> Cantor (1845-1918) inicia a teoria dos conjuntos e a partir daí, a noção de Função passaria a incluir tudo que fossem correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos” (p. 3-4).

Em 1939, Bourbaki, citado por Domingos (1994), define Função como sendo uma relação entre dois conjuntos, ou seja, “uma Função é um subconjunto do produto cartesiano de dois conjuntos” (p. 18).

Outra definição de Função é apresentada por Bento de Jesus Caraça:

> Definição: - Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que y é Função de x e escreve-se
>
> $$y = f(x)$$
>
> se entre as duas variáveis existe uma correspondência no sentido $x \text{ -> } y$.
> A x chama-se variável independente e a y variável dependente. (Caraça, 1951, p. 129)

Domingos (1994) cita outros autores como por exemplo Ferreira (1990) que afirma poder-se interpretar uma Função da seguinte forma:

> pode interpretar-se uma Função *f*, definida em certo conjunto *D* e com valores num conjunto *E*, como uma regra que faz corresponder a cada elemento x de *D* um único elemento $f(x)$ de *E.* O conjunto *D* é chamado domínio de f e o subconjunto *C* de *E* formado por todos os elementos $f(x)$, com $x \in$ *D*, é o contradomínio de f (p.19).

Neves e Brito (1993), citados pelo mesmo autor, dão o nome de "Função ou aplicação f a uma correspondência entre um conjunto *A* e um conjunto *B* se a cada elemento x do primeiro conjunto corresponde um e um só elemento $f(x)$ do segundo conjunto" (p. 19).

Também Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999), referem que tanto em situações da vida real como nos problemas de outras ciências, "quando se diz que uma coisa é função de outra está-se a evidenciar uma relação de dependência, sendo que a primeira varia à medida que a segunda também varia" (p. 103).

Pode então constatar-se que o conceito de Função passou por diversas modificações sendo possível identificar algumas representações na evolução do conceito de Função: Função como relação entre quantidades variáveis, como expressão analítica e como relação entre conjuntos.

2.3.2. As Funções no currículo da Matemática

As Funções têm merecido especial atenção tanto no ensino da Matemática como em trabalhos desenvolvidos por vários autores.

Segundo Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999), o estudo das Funções "pode revelar-se particularmente rico em oportunidades para se estabelecerem conexões entre diversos domínios da Matemática" (p. 97). Estes autores consideram que as Funções surgem, de facto, ao longo de todo o currículo:

(i) nas operações aritméticas, estabelecendo a correspondência entre um par de números e um único número;
(ii) nas transformações geométricas, relacionando conjuntos de pontos com as respetivas imagens;
(iii) na Álgebra, relacionando variáveis que representam números (p. 103).

Na perspetiva de Ponte (1990), o papel curricular do conceito de Função, pode ser visto tendo em conta três aspetos essenciais: (a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem; (b) a generalidade do conceito; e (c) a sua aplicação a problemas e situações da vida real e de outras ciências.

Relativamente a este tema, o Currículo Nacional do Ensino Básico considerava como aspetos específicos para o 3º ciclo:

- o reconhecimento do significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas;
- a aptidão para usar equações e inequações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, inequações e sistemas, assim como para realizar procedimentos algébricos simples;
- a compreensão do conceito de Função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis;
- a aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente à tecnologia gráfica;
- a sensibilidade para entender o uso de Funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade direta e inversa (DEB, 2001, p. 67).

Também o Programa de Matemática do Ensino Básico apresenta objetivos específicos para o estudo das Funções:

- Compreender o conceito de Função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as suas várias notações.
- Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano.
- Analisar uma Função a partir das suas representações.
- Interpretar a variação de uma Função representada por um gráfico, indicando intervalos onde a Função é crescente, decrescente ou constante.
- Analisar situações de proporcionalidade directa e inversa como Funções do tipo $y = kx$ e $y = \frac{k}{x}\ (k \neq 0)$ respetivamente.
- Representar algebricamente situações de proporcionalidade directa e inversa.
- Representar gráfica e algebricamente uma Função linear e uma Função afim.
- Relacionar as Funções linear e afim.
- Relacionar a Função linear com a proporcionalidade directa.
- Relacionar as representações algébrica e gráfica das Funções estudadas.
- Resolver e formular problemas, e modelar situações utilizando Funções (ME, 2007, p. 57).

É ainda recomendado o destaque que deve ser dado ao conceito de Função como relação entre variáveis.

- Na análise de uma Função, os alunos devem identificar o domínio, o contradomínio e determinar imagens de objetos quando a Função é dada por uma tabela, por um gráfico e por uma expressão algébrica.
- Propor a análise de gráficos que traduzam casos de proporcionalidade direta e inversa em contextos da vida real.
- A partir da representação gráfica de uma Função linear ou afim, identificar a imagem dado o objeto e o objeto dada a imagem.
- Os alunos devem compreender a influência da variação dos parâmetros *a* e *b* (na expressão $y = ax + b$) no gráfico da Função.
- Propor a representação algébrica de uma:

– Função linear sendo dado um objeto não nulo e a sua imagem;
– Função afim sendo dados dois objectos e as suas imagens (ME, 2007, p. 57-58).

Pode assim constatar-se que as Funções surgem ao longo de todo o currículo e destaca-se a importância dada a este tema nomeadamente no que respeita à utilização de vários tipos de representação, à formulação e resolução de problemas e à modelação de situações utilizando Funções.

2.3.3. Aprendizagem do conceito de Função

A palavra aprendizagem surge muitas vezes associada à palavra ensino, ambas com uma conotação muito forte na disciplina de Matemática.

Os Princípios para a Matemática Escolar constantes no NCTM (2008) destacam essa importância reservando um espaço para cada um.

No Princípio do Ensino, este documento refere que o ensino efetivo da matemática requer:

- a compreensão daquilo que os alunos sabem e precisam de aprender, bem como o sequente estímulo e apoio para que o aprendam corretamente;
- o conhecimento e compreensão da matemática, dos alunos enquanto aprendentes e das estratégias pedagógicas;
- um ambiente de aprendizagem desafiante e apoiado;
- um constante aperfeiçoamento (p. 17-20).

E apresenta seis normas para o ensino da matemática, emanadas do NCTM (1991), que se direcionam para "tarefas matemáticas significativas; o papel do professor no discurso; o papel do aluno no discurso; instrumentos para aperfeiçoar o discurso; ambiente de aprendizagem; análise do ensino e da aprendizagem" (NCTM, 2008, p. 18).

No que respeita ao Princípio da Aprendizagem, no mesmo documento, pode ler-se: "os alunos devem aprender Matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios. (…) A aprendizagem com compreensão tem, ainda, a capacidade de tornar mais fácil a aprendizagem subsequente e a matemática faz mais sentido se os alunos relacionarem, de forma significativa o novo conhecimento com o conhecimento previamente adquirido" (NCTM, 2008, p. 21).

Para que a aprendizagem do conceito de Função seja efetiva, é necessário que tenha acontecido a compreensão por forma a facilitar outras aprendizagens. Destaca-se o papel do professor na criação de ambientes propícios ao ensino e aprendizagem.

Mas, para que o processo de ensino e aprendizagem seja concebido, na opinião de Chamorro (2003), citado por Alves & Morais (2006), são necessários três intervenientes:

(i) o aluno que deve aprender o que foi previamente estabelecido;

(ii) o saber que deve ser proporcionado como objeto de aprendizagem; e

(iii) o professor que é responsabilizado por levar a cabo todo o projeto de ensino.

Na perspetiva de Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999), embora a aprendizagem do conceito de Função seja preparada desde o 1.º e 2.ºciclos, em vários domínios, este conceito só é estudado de forma explícita no 3.º ciclo. Neste ciclo,

> os alunos devem saber o que é uma Função, identificar correspondências que são Funções e outras que não são, reconhecer diferentes formas de representar Funções bem como indicar objetos e imagens. O estudo de Funções visa a compreensão da noção de Função, enquanto relação entre variáveis e como correspondência unívoca entre dois conjuntos, e também a capacidade de usar este conceito na resolução de problemas reais (p. 116).

Pode assim dizer-se que apesar do conceito de Função ser introduzido desde muito cedo, os alunos manifestam dificuldades na compreensão deste conceito, o que dificulta a sua aplicação nas tarefas em geral e nos problemas reais em particular.

2.3.4. Representações

Na interpretação e aplicação do conceito de Função, importa facultar aos alunos diversas representações.

Esta é a perspetiva de Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999) ao considerarem que

> Um aspecto essencial na aprendizagem das Funções é o contacto com diferentes modos de as encarar e representar. Estabelecer relações entre tabelas de valores, gráficos e expressões algébricas ajuda os alunos a desenvolver diferentes tipos de conexões e a apreender o conceito de Função (p. 104).

A compreensão de relações entre os vários tipos de representação (a gráfica, a algébrica, a tabelar e a verbal), na aprendizagem das Funções, é considerada por vários autores.

De seguida, discute-se o papel das diferentes representações do conceito de Função, a ligação entre elas e vantagens que essa ligação possa trazer para a compreensão deste conceito.

Abrantes, Serrazina, & Oliveira (1999), referem a existência de quatro modos principais de representar uma Função:

> (i) através de enunciados verbais, usando a linguagem natural;
> (ii) graficamente, usando esquemas, diagramas, gráficos cartesianos e outros gráficos;
> (iii) aritmeticamente, com recurso a números, tabelas ou pares ordenados; e
> (iv) algebricamente, usando símbolos literais, fórmulas e correspondências(…) (p. 117).

Estes autores consideram que a compreensão da noção de Função se prende com a capacidade de representar Funções de vários modos e em passar de uns tipos de representação para outros, sendo assim possível identificar Funções iguais, ou a mesma Função, em representações diferentes. Consideram ainda que a introdução de uma tecnologia gráfica contribui para o desenvolvimento desta capacidade.

Canavarro & Gafanhoto (2008), num estudo onde investigaram de que modo os alunos utilizam as representações múltiplas na resolução de tarefas que implicam a utilização de Funções num contexto de trabalho com o *Geogebra*, citam Friedland e Tabach (2001) por apresentarem quatro modos de representação essenciais ao ensino da Matemática, nomeadamente da Álgebra:

> (a) representação verbal – está normalmente associada à apresentação do problema e à interpretação final dos resultados obtidos(…);
> (b) representação numérica – é uma representação natural para os alunos que se encontram a iniciar o estudo da álgebra e, normalmente, precede qualquer outro tipo de representação(…);
> (c) representação gráfica – proporciona uma imagem clara de uma Função de variável real(…);
> (d) representação algébrica – esta é concisa, geral e efectiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, por vezes é o único método de justificar ou efectuar generalizações(…) (p. 6-7).

As autoras, consideram que o uso de diferentes representações faz com que o processo de aprendizagem da Álgebra, em particular das Funções, seja significativo e citam Kaput (1992), por reconhecer a natureza da tarefa, o pensamento do indivíduo que resolve o problema ou a dificuldade em determinados tipos de representação como sendo os principais fatores que poderão determinar o tipo de representação a utilizar.

Partilhando desta opinião, Domingos (1994), refere que “apesar de as Funções poderem ser representadas de diferentes modos, a representação não é o mesmo que a coisa representada e portanto devemos fazer a distinção entre as diferentes maneiras de representar Funções e as próprias Funções” (p. 35). O autor considera necessário estar atento às limitações de cada uma das representações e ao facto de que elas designam um e o mesmo conceito geral pelo que estas diferentes representações são fundamentais para a compreensão das Funções.

Nas orientações curriculares para o ensino da Matemática, as representações também têm vindo a assumir um papel fundamental.

No NCTM (2008), as normas que constam para a representação referem:

> os programas do pré-escolar ao 12.º ano deverão habilitar todos os alunos para:
> - criar e usar representações para organizar, registar e comunicar ideias matemáticas;

- seleccionar, aplicar e traduzir representações matemáticas para resolver problemas;
- usar as representações para modelar e interpretar fenómenos físicos, sociais e matemáticos (p. 75).

É ainda referido neste documento que:

> As representações poderão ajudar os alunos a organizarem o seu raciocínio e a sua utilização poderá ajudá-los a tornar as ideias matemáticas mais concretas e acessíveis à reflexão. (…)
> Os computadores e as calculadoras vieram ampliar o conjunto de representações no ensino da Matemática. (…) e permitem que os alunos explorem modelos de situações que em tempos eram apenas estudados em anos mais avançados. (…)
> À medida que o seu reportório de representações se alarga, é importante que os alunos reflitam sobre o uso que fazem das representações. (…)
> A importância da utilização de diferentes representações deverá ser privilegiada ao longo da educação matemática dos alunos(…) (p. 75-80).

Também o Programa de Matemática do Ensino Básico, ME (2007), destaca o papel das várias representações.

> Os alunos devem ser capazes de lidar com ideias matemáticas em diversas representações. Isto é, devem ser capazes de:
> - ler e interpretar representações simbólicas, pictóricas, tabelas e gráficos, e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação;
> - traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular traduzir para termos matemáticos informação apresentada em linguagem natural;
> - elaborar e usar representações para registar, organizar e comunicar ideias matemáticas;
> - usar representações para modelar, interpretar e analisar situações matemáticas e não matemáticas, incluindo fenómenos naturais ou sociais;
>
> Os alunos devem conhecer e compreender os diferentes tipos de representações, ser capazes de as utilizar em diferentes situações e de seleccionar a representação mais adequada à situação (p. 4-5).

Nas orientações metodológicas do referido programa, as representações desempenham um papel importante em toda a aprendizagem da disciplina de Matemática. Além de ser indicado o envolvimento, sempre que possível, de mais do que uma forma de representação, ainda é referido que os alunos necessitam de adquirir desembaraço a lidar com diversos tipos de representação matemática no trabalho com os números e as operações aritméticas, os objetos geométricos, os dados estatísticos, o simbolismo algébrico e a representação cartesiana ou outros tipos de gráficos, tabelas, diagramas e esquemas:

> (i) Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações para as ideias matemáticas, e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação e interpretar a informação apresentada.
> (ii) Antes das representações simbólicas, muitas vezes é apropriado usar representações icónicas. Os alunos podem sentir a necessidade de representar os objectos e relações matemáticas, começando por desenvolver para isso as suas

próprias representações não convencionais. À medida que o trabalho prossegue, o professor tem de fazer sentir a necessidade de uma linguagem partilhada, introduzindo progressivamente as representações matemáticas convencionais.

(iii) A exploração de conexões entre ideias matemáticas, e entre ideias matemáticas e ideias referentes a outros campos do conhecimento ou a situações próximas do dia-a-dia do aluno, constitui também uma orientação metodológica importante (p. 9).

Neste contexto, considera-se pertinente compreender como é que os alunos integram o uso de diferentes representações quando dispõem da calculadora gráfica, uma vez que esta ferramenta oferece a possibilidade de explorar diversas situações e pode permitir ultrapassar algumas dificuldades ao nível da representação e manipulação de Funções.

2.3.5. Estratégias e dificuldades dos alunos no trabalho com Funções

São vários os autores que nos seus trabalhos referem dificuldades manifestadas pelos alunos relativamente a este tema, além de apresentarem algumas estratégias para ajudar a superá-las.

Segundo Ponte (1990), apesar de se considerar que a noção de Função dever ser introduzida, como conceito com identidade própria, no 3.º ciclo do ensino básico, muitos alunos neste nível de escolaridade, apresentam bastantes dificuldades no que diz respeito ao raciocínio abstrato. Por isso, "o ensino das Funções, deverá atender à necessidade de articular de forma permanente às três formas de representação conhecidas dos alunos: o numérico, o gráfico e o algébrico" (p. 7).

Domingos (1994), considera que apesar de os alunos utilizarem principalmente as representações algébrica e gráfica manifestam dificuldades sobretudo ao passar da segunda para a primeira; refere que ambas as representações são influenciadas pelas Funções que os alunos melhor conhecem, nomeadamente as Funções lineares; e cita Vinner (1983), por considerar duas dificuldades na aprendizagem do conceito de Função: uma prende-se com a noção do próprio conceito e, a outra, com a determinação de quando é que um conceito está corretamente formado na mente do aluno.

As dificuldades que os alunos manifestam no seu trabalho com Funções, também estão presentes em Ponte, Branco & Matos (2009), ao referirem que muitos dos alunos têm dificuldade em fixar a terminologia própria deste tópico e confundem constantemente termos como domínio, objeto e imagem. Segundo estes autores, os alunos revelam menos dificuldades se estes termos forem abordados em situações da realidade do que se usados em contextos puramente matemáticos. Como estratégias de remediação, os autores consideram que se deve combinar estes dois tipos de contexto de modo adequado. Consideram ainda que os alunos revelam dificuldade no uso da simbologia x, y e $f(x)$ e recomendam que esta simbologia seja utilizada em sala de aula levando os alunos a utilizá-la de forma adequada, no estudo das Funções, desde o 3.º ciclo, passando pelo ensino secundário e até superior. Relativamente às Funções afim e linear recomendam que estas se desenvolvam em situações contextualizadas, permitindo aos alunos passar a informação de uma representação para a outra e usá-la na resolução de problemas.

Por sua vez, Dias, Prates, & Tavares (2011), também abordam algumas das dificuldades manifestadas pelos alunos quando tentam compreender o conceito de Função. Referem autores que considerando essas dificuldades relacionadas com o uso de símbolos, propõem "a resolução de tarefas matemáticas de natureza diversa para ajudar a promover nos alunos o desenvolvimento do pensamento algébrico, da capacidade de interpretar e de manipular os símbolos matemáticos, e as relações existentes entre eles, bem como desenvolver a capacidade em lidar com as estruturas algébricas(…)" (p. 166).

Com base nas perspetivas apresentadas relativamente às dificuldades que os alunos revelam na compreensão do conceito de Função e nas indicações do Programa de Matemática, pode afirmar-se que uma abordagem gráfica associada ao uso de um recurso como a calculadora gráfica, a articulação entre as diferentes formas de representação e o recurso a tarefas contextualizadas, pode proporcionar uma melhor compreensão destes objetos matemáticos.

2.3.6. Os Sistemas de Equações

Os Sistemas de Equações lineares são considerados essenciais tanto na disciplina de Matemática como na aplicação a outras ciências.

Essa relevância é confirmada por exemplo no NCTM (2008). Segundo as normas deste documento, relativamente a este tema, os programas deverão habilitar todos os alunos para representar e analisar situações e estruturas matemáticas, usando símbolos algébricos. Assim, todos os alunos deverão escrever formas equivalentes de Equações e Sistemas de Equações, resolvendo-os com destreza - mentalmente ou com papel e lápis, em casos simples, e usando a tecnologia em todos eles (p. 352).

Relativamente aos Sistemas de duas Equações do 1.º grau a duas incógnitas, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), refere três objetivos específicos: "resolver Sistemas de Equações pelo método de substituição; interpretar graficamente as soluções de um Sistema de Equações; resolver e formular problemas envolvendo Equações e Sistemas de Equações" (p. 57). É ainda dada indicação para que na interpretação gráfica de Sistemas de Equações, sejam tratados os casos de sistemas possíveis determinados, possíveis indeterminados e impossíveis.

Segundo Ponte, Branco & Matos (2009), o estudo das equações do 1.º e 2.º grau, das inequações do 1.º grau e dos Sistemas de Equações lineares, além de proporcionar aos alunos um conjunto de ferramentas para a modelação de situações da realidade, contribui também para desenvolver a sua capacidade de utilizar a linguagem algébrica, o raciocínio matemático e a capacidade de resolver problemas. Na resolução de Sistemas de Equações, estes autores consideram importante que os alunos compreendam a conjunção de condições e a sua interpretação geométrica, no entanto alertam para o facto de o trabalho com Sistemas se tornar incompreensível para os alunos se este se resumir à prática da resolução de exercícios e mecanização de procedimentos (…) Para o evitar é necessário proporcionar aos alunos tarefas devidamente orientadas para a progressiva aprendizagem.

Este tema é ainda aprofundado em diversos cursos do ensino superior.

No que respeita à aprendizagem dos Sistemas de Equações do 1.º grau a duas incógnitas, Ponte, Branco & Matos (2009), referem que "uma vez que os sistemas de duas equações resultam da interseção de duas equações do 1º grau a duas incógnitas, os alunos devem ter noção de alguns conceitos anteriormente trabalhados quer na resolução de equações literais, quer no estudo das Funções" (p.149). Acrescentam também que do trabalho com equações literais e com Funções, os alunos devem ter presente que a solução de uma equação literal com duas variáveis é um par ordenado, que normalmente, as soluções são infinitas; e ainda que a representação gráfica de uma equação do tipo $y = ax + b$ é uma reta.

Nesta perspetiva, sendo um Sistema de duas Equações a duas incógnitas constituído por duas equações do tipo anterior, cada uma das equações é refente a uma reta. Assim, se as retas não forem paralelas, encontram-se num ponto cujas coordenadas satisfazem ambas as equações designando-se por solução do Sistema. Os autores consideram a interpretação da representação gráfica de um Sistema de Equações "fundamental quer para a compreensão da noção de Sistema como para a natureza da respetiva solução" (p.149).

Apesar de existirem vários processos algébricos para a resolução de Sistemas de Equações, o Programa de Matemática para o Ensino Básico (2007) recomenda que os alunos aprendam a resolver Sistemas de Equações pelo método de substituição, no entanto considera benéfico que esta resolução seja complementada com a resolução gráfica por forma a ser promovida a solução.

Esta é também a perspetiva inerente a Ponte, Branco & Matos (2009) ao considerarem que:

> Os alunos podem representar as retas associadas às duas Funções recorrendo à calculadora gráfica e visualizar onde se situa o ponto de intersecção (caso exista), confirmando o que fizeram algebricamente (…). A grande variedade de casos existentes podem ser explorados com recurso a tecnologia, nomeadamente à calculadora gráfica, podendo os alunos trabalhar, gráfica e algebricamente, com Sistemas de Equações e procedendo à sua classificação: Sistemas possíveis e indeterminados, em que as retas correspondentes são paralelas coincidentes e Sistemas de Equações impossíveis, em que as retas são estritamente paralelas. (p. 150-151)

Tal como acontece na resolução de tarefas que envolvam Funções, os alunos também manifestam dificuldades na resolução e aplicação de Sistemas de duas Equações a duas incógnitas.

> “As principais dificuldades dos alunos no trabalho com Sistemas de Equações podem agrupar-se em três categorias:
> (i) compreender a noção de Sistema e a natureza da solução de um Sistema de Equações;
> (ii) compreender os processos utilizados na resolução de Sistemas de Equações e ser capaz de os executar corretamente até obter a solução; e
> (iii) ser capaz de resolver problemas dados por enunciados verbais, traduzindo as condições dadas por um Sistema de Equações e interpretando a solução do sistema de acordo com as condições dadas.” (Ponte, Branco, & Matos, 2009, p.151).

Os alunos também manifestam dificuldades na tradução de situações dadas em linguagem natural para Sistemas de Equações tais como:

> a falta de compreensão dos enunciados em linguagem natural, o desconhecimento das regras de sintaxe da linguagem algébrica, o estabelecimento de relações incorretas entre as duas linguagens, a simples distração ou o foco em pistas enganadoras.
> Para além disso, envolvem uma dificuldade acrescida – a noção de conjunção de condições. A resolução de alguns problemas, formulados inicialmente em linguagem natural e discutidos, por fim, com toda a turma, é também considerada uma boa forma de promover o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e da comunicação matemática, por parte dos alunos. (Ponte, Branco, & Matos, 2009, pp. 151-152)

Os Sistemas de duas Equações do 1.º grau a duas incógnitas, sendo constituidos por duas equações e cada uma delas contemplar duas incógnitas trazem, de um modo geral, dificuldades acrescidas. Por um lado, os alunos precisam de conhecimentos prévios no que respeita a equações do 1.º grau e a equações literais, e por outro lado, os Sistemas aparecem, na maioria das vezes, associados à resolução de problemas.

2.4. Calculadora gráfica, Funções e Sistemas de Equações

Uma vez que a utilização de diferentes representações deve ser privilegiada tanto na aprendizagem do conceito de Função como na resolução de Sistemas de Equações, o uso da calculadora gráfica parece ser uma boa estratégia para ajudar os alunos a ultrapassar algumas das dificuldades manifestadas, nomeadamente na representação gráfica e na ligação entre as diferentes representações.

Na diversa literatura existente sobre o uso das tecnologias na sala de aula, nomeadamente no que diz respeito à calculadora gráfica, é notório a divergência de opiniões.

Tem-se, por um lado, os defensores do seu uso, considerando que a aprendizagem da Matemática pode ser melhorada; e por outro lado, os opositores que consideram a utilização pouco racional desta ferramenta prejudicial para os alunos.

Segundo o NCTM (2008),

> as tecnologias electrónicas – calculadoras e computadores – constituem ferramentas essenciais para o ensino, aprendizagem e o fazer matemática. Aqui, estes instrumentos são considerados importantes na investigação em matemática, por

> facilitarem o trabalho aos alunos na medida em que lhes permitem dedicar maior atenção aos seus raciocínios, reflexões, conjeturas e à resolução de problemas. (…) A possibilidade de envolver os alunos em desafios matemáticos aumenta de forma acentuada, com a utilização das tecnologias e a aprendizagem dos alunos é auxiliada através do *feedback* que a tecnologia pode proporcionar (p. 27).

Este documento identifica como um dos seis princípios para Matemática Escolar, o Princípio da Tecnologia NCTM (2008) "a tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da Matemática; influencia a Matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos” (p. 26). Refere ainda que “ munidos de uma calculadora gráfica ou de um computador, os alunos poderão testar algumas conjeturas mais facilmente do que com lápis e papel” (p. 268).

Também o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), refere o uso de tecnologias:

> Ao longo de todos os ciclos, os alunos devem usar calculadoras e computadores na realização de cálculos complexos, na representação de informação e na representação de objectos geométricos. O seu uso é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objetivo prioritário de aprendizagem, e em que a atenção se deve centrar nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados. A calculadora e o computador não devem ser usados para a realização de cálculos imediatos ou em substituição de cálculo mental (p. 9-10).

Neste ponto, pode constatar-se que a utilização da calculadora gráfica no trabalho com Funções e Sistemas de Equações é muitas vezes considerada como um bom complemento da resolução analítica. Este recurso permite aos alunos a exploração de diversas situações em menos tempo, reservando assim mais tempo para analisar e interpretar os resultados e para retirar as devidas conclusões.

Num estudo de Semião & Canavarro (2012) são referidos autores como Dunham & Dick, Demana e Waits, entre outros por considerarem que:

> a utilização da calculadora gráfica permite, por exemplo experimentar, investigar e resolver problemas, facultando uma nova dinâmica de sala de aula, possibilitando assim uma abordagem mais investigativa dos conteúdos matemáticos; e facultar ainda a ligação entre as múltiplas representações matemáticas, potenciando uma melhor compreensão destas (p. 2).

Para Domingos (1994), a utilização da tecnologia gráfica é a forma mais comum de estabelecer a ligação entre as diferentes representações de uma Função e refere os trabalhos de Drijvers sobre da utilização da calculadora gráfica na sala de aula:

> o facto de ser possível desenhar um grande número de gráficos de Funções, pode ser uma ferramenta poderosa para estudar conjuntos de Funções, podendo os gráficos ser utilizados para futura investigação (…). Por outro lado, os gráficos podem fornecer argumentos no raciocínio e no processo de conjeturas, verificação e falsificação por forma a ajudar os alunos a construir a sua própria teoria (p. 45).

Nesta sequência, Almeida & Oliveira (2009), destacam no seu trabalho a importância de os alunos visualizarem as alterações que ocorrem na representação gráfica de uma Função a partir de mudanças que são efetuadas na sua expressão algébrica, onde este facto é considerado como uma contribuição importante para a melhoria do processo ensino e aprendizagem das Funções. Referem ainda autores que consideram ser

> a diversidade das representações que dá significado a um objeto matemático(…) a aprendizagem de um conceito apenas se dá quando o sujeito consegue articular vários registos de representação(…) Além disso, os alunos tornam-se capazes de combinar os diferentes recursos de informação disponíveis e, desta forma, construir o seu próprio entendimento dos conceitos matemáticos. (…) É necessário que os alunos desenvolvam tarefas de caráter experimental onde transitem entre o trabalho efetuado com lápis e papel e o trabalho efetuado na calculadora gráfica, e que comparem os resultados dos diferentes registos. (Almeida & Oliveira, 2009, p. 90-91)

Partilhando da mesma opinião, Waits & Demana (2000) referem que, apesar de a calculadora gráfica aumentar a participação e o envolvimento dos alunos no trabalho desenvolvido em sala de aula bem como gosto pela Matemática, é fundamental estabelecer-se um equilíbrio entre o uso das tecnologias e as técnicas de papel e lápis.

Relativamente ao uso das tecnologias, Domingos (2011), considera que apesar de frequentemente aparecerem "ferramentas cada vez mais potentes que podem ser úteis quer para o professor, quer para o aluno, a nossa preocupação deve centrar-se na "forma como essas ferramentas podem ser exploradas, em prol de um ensino de qualidade" (p. 56-63).

A par da utilização da tecnologia, e neste caso da calculadora gráfica, considera-se necessário refletir sobre o modo como essa utilização é feita e algumas limitações inerentes ao seu uso. As diferentes formas de utilização da calculadora gráfica são referidas por alguns autores e merecem uma importância especial neste estudo.

Apresentam-se a seguir cinco padrões e modos de utilização da calculadora por parte dos alunos, identificados por Doerr & Zangor (2000):

Tabela 2. 1 – Padrões e modos de uso da calculadora gráfica (Doerr e Zangor, 2000, p. 151)

Role of the Graphing Calculator	Description of Student Actions
Computational Tool	evaluating numerical expressions, estimating and rounding
Transformational Tool	changing the nature of the task
Data Collection and Analysis Tool	gathering data, controlling phenomena, finding patterns
Visualizing Tool	finding symbolic functions, displaying data, interpreting data, solving equations
Checking Tool	confirming conjectures, understanding multiple symbolic forms

São aqui referidas as diferentes funções desempenhadas pela calculadora gráfica e descritas as respetivas ações por parte dos alunos:

(1) como ferramenta computacional – quando utilizada para avaliar expressões numéricas, estimativas e arredondamentos;

(2) como ferramenta transformacional – quando utilizada para alterar a natureza da tarefa;

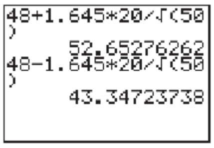
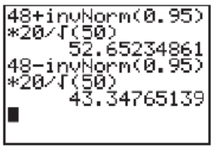
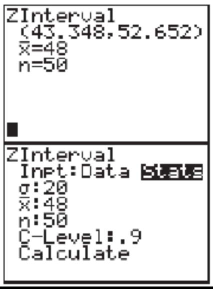
(3) como ferramenta de recolha e análise de dados – quando utilizada para recolha e armazenamento de dados, estudar os fenómenos a que estes dizem respeito e procurar modelos;

(4) como ferramenta de visualização – quando utilizada para encontrar visualizações adequadas, para representar e interpretar dados e para resolver equações; e

(5) como ferramenta de verificação – quando utilizada para confirmar conjeturas e compreender as múltiplas formas simbólicas.

O efeito que a calculadora pode ter no desempenho dos alunos também é tido em atenção por Graham et al. (2003), ao classificarem a forma como a calculadora gráfica pode ser usada nas três categorias, descritas na tabela seguinte:

Tabela 2. 2 - Exemplo de classificação do uso da calculadora gráfica (Graham et al., 2003, p. 323)

Quasi-scientific approach		In this approach the student uses their knowledge of the definition of a confidence interval in conjuction with a book of statistical tables to compute the confidence interval.
Semi-proficient approach		In this approach the student uses their knowledge the definition of a confidence interval, but obtains the required values from the calculator, and so does not need to use a book of statistical tables.
Proficient approach		The student uses the facility provided in the calculator to calculate the required confidence interval.

As autoras referem que:

- na 1.ª categoria: Quasi - científica – não se dá uso às potencialidades da calculadora gráfica, esta é utilizada da mesma forma que uma calculadora científica. O utilizador parece não estar consciente das potencialidades disponíveis numa calculadora gráfica;
- na 2.ª categoria: Semi - proficiente – embora sejam utilizadas algumas das potencialidades da calculadora gráfica, não é feito o melhor e mais eficiente uso da mesma. O utilizador tem consciência de algumas das potencialidades da calculadora

gráfica, mas não sabe como fazer o melhor uso delas ou não está consciente da potencialidade que dá a solução mais eficiente para o problema;

- na 3.ª categoria: Proficiente – é feito o uso apropriado das potencialidades da calculadora gráfica por forma a obter a solução mais eficiente para a tarefa em mãos. O utilizador tem consciência da grande gama de potencialidades disponíveis nesta calculadora e é capaz de selecionar a potencialidade apropriada para alcançar a solução.

Independentemente do modo como os alunos utilizam a calculadora gráfica, alguns autores consideram limitações nestes artefactos.

Num estudo sobre limitações da calculadora gráfica, Consciência (2003), alerta para que o uso da calculadora seja feito de forma ponderada e considera que ao utilizar esta ferramenta, podem surgir alguns problemas, nomeadamente no que respeita a:

(i) precisão numérica – a calculadora tem precisão finita;
(ii) resolução do *écran* – esperava-se que uma vez introduzida a expressão algébrica, a calculadora fornecesse, em pouco tempo uma ideia global da Função, o que nem sempre se consegue. Tem a ver com a janela de visualização. É importante procurar-se uma janela adequada para que se possam retirar as conclusões pretendidas;
(iii) construção de um gráfico – a principal dificuldade, prende-se com a resolução do *écran*.

Na opinião da autora, estas limitações podem ser utilizadas pedagogicamente para confrontar os alunos e esperar as situações que daí possam resultar.

Rocha (2013), no seu estudo, procurou conhecer e compreender as opções do professor relativamente à forma como durante o estudo das Funções os alunos se apropriam do significado da janela de visualização da calculadora gráfica. Cita autores como por exemplo Cavanagh (2006) por mencionar "a preferência dos alunos pela adoção de valores simétricos e iguais nos dois eixos"(…) e Hodges e Kissane (1994) por referirem a "falta de consciência dos alunos relativamente ao impacto que qualquer alteração da janela de visualização tem sobre o gráfico observado" (p.374). A autora considera que algumas das dificuldades se prendem essencialmente com o deficiente domínio das noções envolvidas e que outras estão diretamente associadas à escolha adequada da janela de visualização, nomeadamente os casos em que o ecrã não exibe uma vista global do gráfico da Função. Destaca ainda o papel do professor na atenuação das dificuldades com as quais os alunos se deparam quando utilizam a calculadora, bem como no reforço de ligações entre as diferentes representações.

No que respeita à interpretação e construção de gráficos, Domingos (1994), refere, também, várias dificuldades manifestadas pelos alunos, nomeadamente:

(i) a utilização de escalas;
(ii) o facto de considerarem a maior parte das variações como lineares;
(iii) as dificuldades em lidar com as variáveis quando estas estão envolvidas em situações de certa complexidade.

O facto de as calculadores serem diferentes e apresentarem regras de funcionamento próprias pode ser uma dificuldade por parte dos alunos.

Neste estudo optou-se por todos os alunos trabalharem com a calculadora gráfica igual à utilizada pela professora ao longo de todo o ano, permitindo-lhes um melhor conhecimento e domínio desta ferramenta.

2.5. O papel do professor

> "O professor é hoje visto como um elemento chave no processo de ensino e aprendizagem."
> (Ponte, 1994b, p. 9)

Segundo este autor, o professor, pode ser visto como um *técnico* – que transmite informação e avalia a sua aprendizagem; como um *ator* – na forma como desempenha as suas tarefas; e como um *profissional* – que procura responder às mais variadas situações com que se depara.

No que respeita às práticas profissionais dos professores, Ponte & Serrazina (2004), consideram-nas como um dos fatores que mais influencia a qualidade do ensino e da aprendizagem dos alunos. Segundo estes autores, estas práticas envolvem vários campos da atividade do professor e é frequente organizá-las em três grandes grupos:

(i) práticas letivas,

(ii) práticas profissionais na instituição;

(iii) práticas de formação.

Não se encontrando isoladas das outras, são as práticas letivas as que se relacionam de forma mais direta com a aprendizagem dos alunos. No que respeita a esta prática, os autores têm em consideração: as tarefas propostas, os materiais utilizados, a comunicação na sala de aula, as práticas de gestão curricular e as práticas de avaliação.

De igual forma, Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), consideram o professor como o elemento chave do ambiente vivido em sala de aula, a quem cabe a responsabilidade de organização das tarefas; que deve propor situações de aprendizagem e promover a reflexão dos alunos sobre essas experiências e esses conhecimentos; que deve valorizar as interações que se vão estabelecendo entre os alunos e entre estes e o professor, e que não deve ser visto isoladamente, mas sim integrado numa escola cujo ambiente acaba por influenciar o seu trabalho.

Mas, o papel do professor, as metodologias e os materiais têm sido modificados em consequência das diversas alterações que foram surgindo na matemática escolar.

Para dar resposta a tal situação, cabe ao professor definir objetivos, delinear estratégias que vão de encontro à aprendizagem dos seus alunos e refletir sempre sobre a sua prática e os resultados obtidos.

Partilham desta opinião Fonseca, Brunheira & Ponte (1999) ao considerarem que além da preparação das aulas constituir um momento necessário, não menos importante é a reflexão sobre o trabalho realizado. Segundo os autores, nessa reflexão, devem ser realizadas duas avaliações:

Uma avaliação sobre a forma como decorreram as aulas e que conduz a questões como: A tarefa mostrou-se adequada aos objetivos iniciais? Os materiais e recursos utilizados foram úteis? A organização dos alunos foi pertinente? Deve ser alterada? A introdução da tarefa foi suficiente? A gestão do tempo foi boa? Que dificuldades foram sentidas?

> • Uma avaliação (ainda que informal) sobre o trabalho e a aprendizagem dos alunos e que se debruça sobre questões como: De que forma reagiram os alunos à tarefa? Como está a evoluir a sua relação com as investigações? Em que tipo de processos (questionar, conjeturar, testar, provar...) demonstram maior facilidade ou dificuldade? Como se está a desenvolver a sua capacidade de expressar ideias matemáticas (oralmente ou por escrito)? (p.11-12).

Os autores consideram esta reflexão muito importante na medida em que informa o professor sobre o seu trabalho futuro e contribui para a sua aprendizagem sobre outras formas que possibilitem o melhor desempenho do seu papel, atendendo ao maior conhecimento que vai construindo sobre os seus alunos, sobre as atividades desenvolvidas e sobre a relação destas com a aprendizagem.

Pires (2011), também refere a importância do conhecimento e desenvolvimento do professor no geral, particularizando ao professor de Matemática. Considera que são exigidos ao professor “saberes muito complexos que se distribuem por dimensões e domínios muito diversificados” (p. 34) e apresenta um esquema que caracteriza o conhecimento profissional, apresentada por si em 2006.

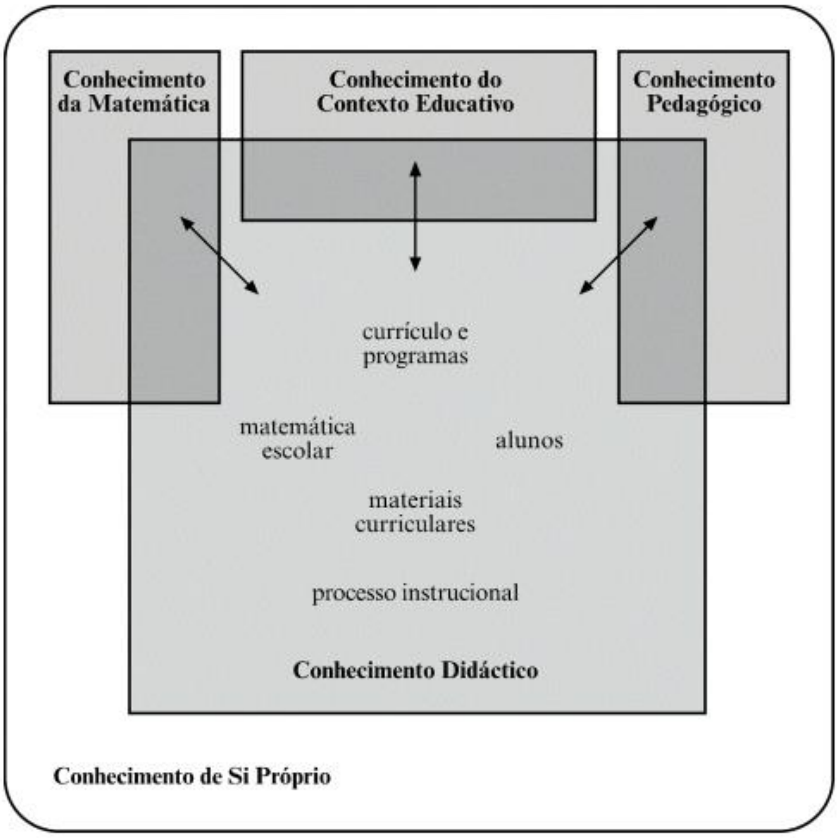


Figura 2. 4 - Domínios essenciais do conhecimento profissional do professor (Pires, 2011, p. 34)

Neste esquema, o autor evidencia a importância do professor na moldagem dos diversos conhecimentos em prol da construção do seu próprio conhecimento profissional.

Neste estudo, o papel que a professora desempenhou foi fundamental. Desde a elaboração da planificação (Anexo I), (com a colaboração dos restantes elementos do grupo disciplinar da sua escola), passando pela preparação das aulas, pela escolha das tarefas a realizar e das ferramentas a utilizar, tendo sempre presente a contribuição que estas possam trazer para a aprendizagem dos alunos. A professora mostrou conhecimento no que respeita à disciplina, ao programa e currículos, e aos seus alunos. Utilizou materiais e recursos diversificados. Procura manter-se atualizada no que respeita às tecnologias, nomeadamente à calculadora gráfica. Apesar de estar a utilizar uma versão recente da *Texas Instruments*, a professora já tinha frequentado uma formação no âmbito da calculadora gráfica *TI-Nspire,* pelo que considerou pertinente partilhar esses conhecimentos com os seus alunos.

2.6. As tarefas

A aprendizagem da Matemática depende do envolvimento do aluno na realização das tarefas propostas pelo professor, podendo esse envolvimento ser influenciado pela utilização da tecnologia.

Da análise de um estudo, feito em Portugal, sobre as práticas profissionais dos professores de Matemática, realizado pela Associação de Professores de Matemática - APM (1998) - *Projeto Matemática 2001*, após inquirir professores sobre as situações de trabalho que usam com mais frequência nas suas aulas, pode constatar-se que existia um tipo de tarefa com um lugar de referência – o exercício. 94% dos professores do 2º ciclo, 91% do 3º ciclo e 94% do ensino secundário afirmam usá-los sempre ou em muitas aulas. Em segundo lugar, com 80%, 77% e 67% respectivamente, surgem os problemas. Só mais abaixo na tabela aparecem as situações em que se pode esperar um maior envolvimento dos alunos, por apresentarem um carácter mais aberto e desafiante, são as atividades de exploração (18%, 12% e 14%), e o trabalho de projeto com (1%, 2% e 3%), respetivamente, como se pode verificar na tabela seguinte:

Tabela 2. 3 - Situações de trabalho na aula, (*Projecto Matemática 2001* - APM, 1998, p. 31)

(somas das percentagens atribuídas aos valores mais elevados sempre ou em muitas aulas)

Situações de trabalho na aula	2º Ciclo (%)	3º Ciclo (%)	Ens. Sec. (%)	Total (%)
Exercícios	94	91	94	93
Problemas	80	77	67	75
Exposição pelo professor	52	69	81	67
Trabalho c/ situações da realidade	62	45	26	45
Discussão entre alunos	35	33	25	31
Atividades de exploração	18	12	14	15
Histórias da Matemática	3	8	4,5	5
Trabalho de Projeto	1	2	3	2

Segundo os autores deste projeto, as situações de trabalho na aula, podem dividir-se em três grupos:

Grupo I - os exercícios, a exposição por parte do professor e os problemas, já que são as situações mais referidas;

Grupo II – o trabalho com situações da realidade, a discussão entre alunos e as atividades de exploração, por terem um número significativo de referências, e

Grupo III – a História da Matemática e o trabalho de projecto, praticamente, não são referidos.

Relativamente às tarefas, Stein e Smith (1998), apresentam o quadro seguinte onde são distintas três fases pelas quais passa a tarefa:

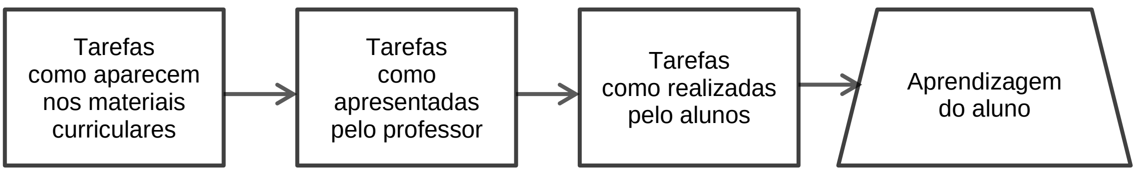


Figura 2. 5 - Quadro das Tarefas Matemáticas, (Stein & Smith, 1998, p. 24)

Todas estas fases são vistas como influências importantes sobre o que os alunos aprendem, pelo que se considera fundamental a sua escolha de forma a rentabilizar essa aprendizagem. Assim, “o papel do professor na seleção dos problemas e das tarefas matemáticas relevantes é fundamental.” (NCTM, 2008, p. 58)

O Programa de Matemática (ME, 2007) também apresenta várias orientações metodológicas, destacando-se a necessidade de diversificação de tarefas. Dá especial atenção a tarefas que assumam um caráter mais exploratório e considera que, no seu conjunto, estas devem proporcionar aos alunos momentos de aprendizagem que possibilitem a construção de conceitos fundamentais, a compreensão dos procedimentos matemáticos em causa, o domínio das representações e o estabelecimento de conexões dentro da Matemática e entre esta e outros domínios. É também valorizado o envolvimento dos alunos em momentos de reflexão e discussão na sala de aula bem como a importância do uso apropriado de tecnologias e de outros materiais.

Ao invés da resolução de exercícios que consideram como tarefa de rotina, vários autores valorizam as tarefas de investigação e resolução de problemas que podem apelar mais ao desafio.

Ponte (2005), refere duas dimensões fundamentais das tarefas:

(i) o grau de desafio matemático – relacionado com a dificuldade das questões colocadas que pode ser reduzida ou elevada e

(ii) o grau de estrutura – relacionado com a natureza aberta ou fechada.

No seguimento desta ideia, e cruzando as duas dimensões, o autor obtém quatro quadrantes onde começa por situar:

o exercício - tarefa fechada e de desafio reduzido (2.º quadrante);

o problema - tarefa também fechada, mas com desafio elevado (3.º quadrante);

a investigação - que apesar de ter um grau de desafio elevado, é uma tarefa aberta (4.º quadrante).

Só por fim preenche o 1.º quadrante com as tarefas abertas relativamente fáceis - tarefas de exploração.

Obtém assim o seguinte esquema onde relaciona os vários tipos de tarefas:

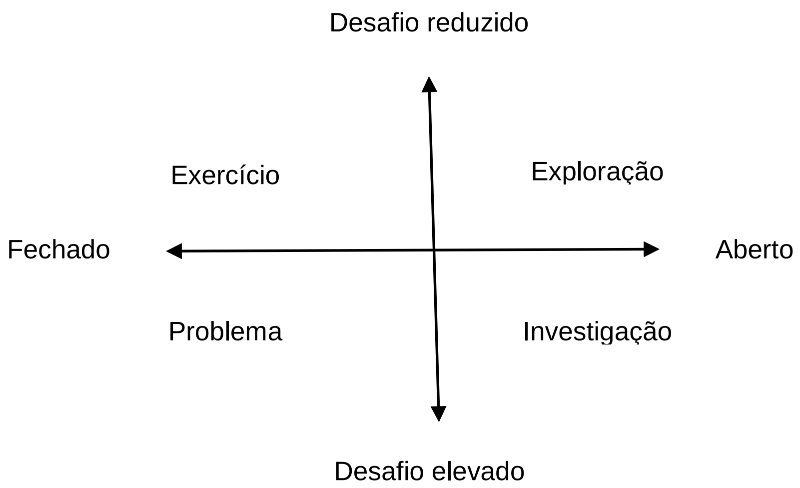


Figura 2. 6 - Relação entre os vários tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura (Ponte, 2005, p. 8)

O autor considera ainda outras duas dimensões das tarefas: a duração e o contexto, como se pode observar na figura seguinte:

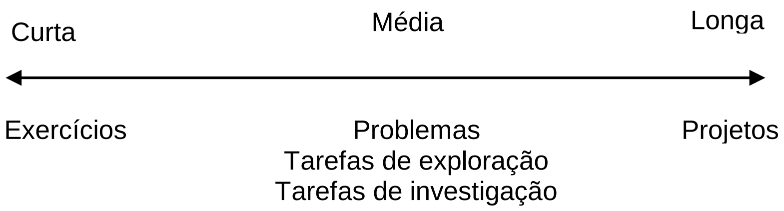


Figura 2. 7 - Diversos tipos de tarefas, quanto à duração (Ponte, 2005, p.10)

Apesar de uma tarefa poder dar um contributo para a aprendizagem de uma determinada unidade de ensino, é importante considerar um conjunto de tarefas diversificadas, para que os objetivos sejam alcançados. Assim, as tarefas a propor devem estar relacionadas e devem ser apresentadas aos alunos de modo a proporcionar a sua aprendizagem.

Nesta perspetiva, o conjunto de tarefas propostas abordam os tópicos Funções e Sistemas de Equações, de diferentes pontos de vista – gráfico, numérico e algébrico – com diferentes graus de complexidade e duração do tempo de resolução. Por se considerar que a calculadora gráfica pode ajudar a criar um ambiente de aula propício à aprendizagem, as tarefas foram planeadas de forma a esta ferramenta poder ser utilizada.

2.7. Modelação

> "A Matemática é aplicada às mais diversas áreas, explícita ou implicitamente, através da noção de modelo." (Ponte, 1992b, p. 100)

Segundo este autor, "um modelo matemático constitui uma representação de uma dada situação, objeto ou fenómeno através de objetos, relações e estruturas com que se descrevem os seus elementos que se consideram fundamentais." (p. 100). Considera que o processo de construção e aprefeiçoamento de um modelo matemático é um processo dinâmico que envolve vários passos esquematizando-o da seguinte forma:

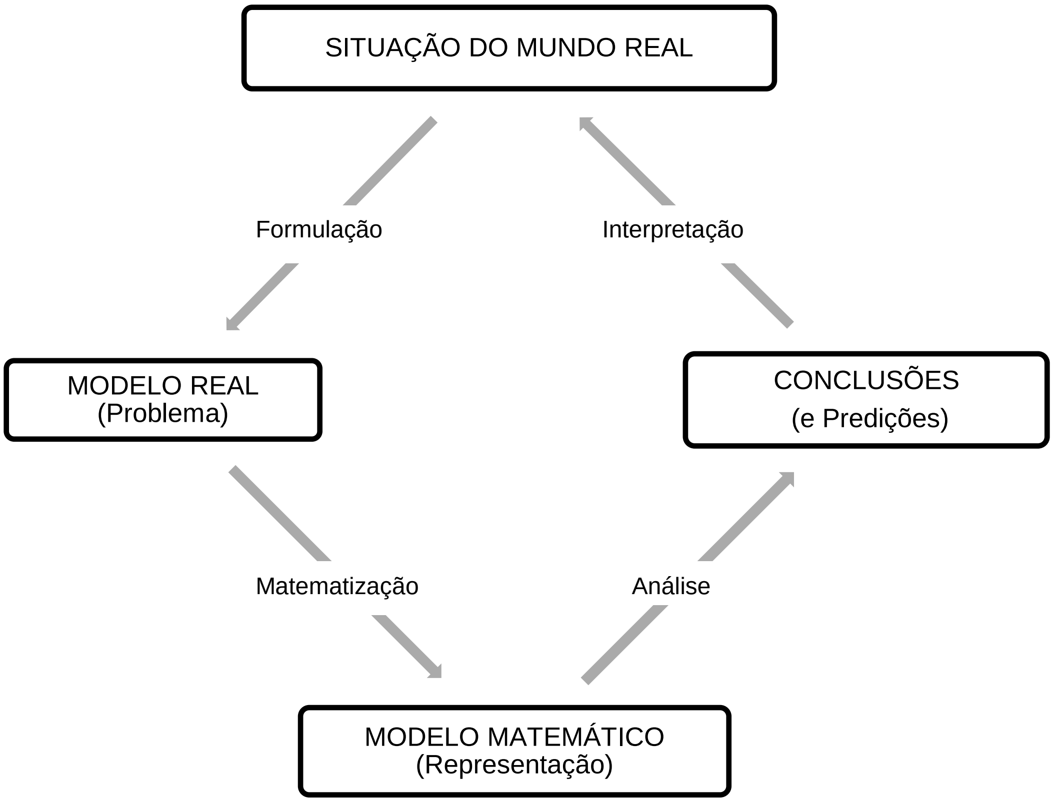


Figura 2. 8 - O Processo de Modelação (Ponte, 1992b, p. 101)

O primeiro passo é reservado para a identificação do problema ou *situação do mundo real*. Este problema deve ser modificado e simplificado considerando-o, nesta fase, como *modelo real*. De seguida há necessidade de traduzir o problema para linguagem matemática, resultando assim num *modelo matemático*. Uma vez obtido este modelo, utilizando ferramentas matemáticas e lógicas e recorrendo muitas vezes às tecnologias, tenta-se chegar às *conclusões* que são comparadas com o mundo real para avaliar a utilidade do modelo.

O autor considera que, embora a construção de modelos não seja uma tarefa fácil, a escola não se deve alhear a essas dificuldades e refere como

> importante objetivo educativo que os alunos desenvolvam as suas capacidades de:
> a) compreender e usar modelos já construídos ou semiconstruídos;
> b) construir modelos;
> c) explorar as implicações de modelos dados, ou por si construídos;
> d) avaliar modelos dados, ou por si construídos, refletir sobre a sua utilização. (Ponte, 1992b, p. 102)

Num outro documento, Ponte (1992a) refere que os modelos podem descrever situações reais ou imaginárias assumindo várias formas e afirma consistirem em equações ou Sistemas de Equações.

Abrantes, Serrazina, & Oliveira (1999), descrevem a modelação como sendo "a capacidade para representar de uma forma abstrata uma situação problemática que envolve variáveis" (p. 108-109) e referem que essa representação pode fazer-se através de equações, tabelas e gráficos. Consideram que as Funções são muitas vezes utilizadas na modelação de situações do mundo real e incluem os modelos matemáticos nas competências matemáticas que os alunos do 3º ciclo devem desenvolver "a sensibilidade para entender o uso de Funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade direta e inversa" (p. 109-110).

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), menciona como propósito principal de ensino no domínio da Álgebra, desenvolver nos alunos a linguagem e o pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos. A modelação também é referida nos objetivos gerais de aprendizagem deste tema considerando que os alunos devem "ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos" (ME, 2007, p.55).

Esta é a perspetiva inerente ao NCTM (2008), decretando que "do 6.º ao 8.º ano todos os alunos deverão modelar e resolver problemas inseridos num contexto, utilizando diversas representações, como gráficos tabelas e equações" (p. 262).

Consciente que este tema não é muito trabalhado ao longo do 3.º ciclo do ensino básico, mas tendo presente as vantagens que pode trazer para o desenvolvimento da aprendizagem, neste estudo, foi apresentada aos alunos uma situação de modelação matemática.

3. METODOLOGIA

Este capítulo pretende descrever a metodologia utilizada ao longo deste estudo.

Em primeiro lugar surgem as opções metodológicas onde se apresentam as características inerentes à abordagem qualitativa enquanto metodologia de investigação e as razões que levaram à opção por esta abordagem e ao estudo de caso.

Segue-se a caracterização da escola, do meio envolvente, da turma e dos grupos de trabalho. Por fim, far-se-á a descrição dos participantes e contextualização da sua escolha.

3.1. Opções metodológicas

Tendo em conta os objetivos definidos para esta investigação já anteriormente apresentados, pretende-se, neste capítulo, justificar a opção por uma metodologia de natureza qualitativa recorrendo a um estudo de caso.

3.1.1. Investigação qualitativa

A metodologia adotada no presente estudo é de natureza qualitativa, visto pretender-se compreender de que forma os alunos se apropriam da calculadora gráfica e de que modo a utilizam na resolução de tarefas com Funções e Sistemas de Equações, na sala de aula.

Bogdan & Biklen (1994), consideram este tipo de investigação adequado quando estão presentes as seguintes características:

1. A fonte direta dos dados é o ambiente natural – os dados são recolhidos em sala de aula, mediante observação participante, uma vez que o comportamento dos alunos pode ser influenciado pelo contexto em que ocorre;
2. É uma investigação descritiva – os dados recolhidos são em forma de palavras ou imagens, incluem transcrições de entrevistas, notas de campo e outros registos;
3. Os investigadores qualitativos interessam-se pelo modo como os fenómenos decorrem, considerando mais relevante todo o processo do que propriamente os resultados finais;
4. A análise dos dados é feita de forma indutiva, não tendo como objetivo confirmar hipóteses construídas previamente, mas sim à medida que os dados forem sendo recolhidos;
5. O significado que os participantes atribuem às suas experiências é de extrema importância na abordagem qualitativa.

Além disso, referem como estratégias mais representativas da investigação qualitativa e que melhor ilustram as características referidas:

(i) a observação participante – onde o investigador se introduz no meio das pessoas que pretende estudar, tenta conhecê-las e dar-se a conhecer para ganhar a sua confiança, registando, por escrito, tudo aquilo que ouve e observa;
(ii) a entrevista em profundidade – cujo principal objetivo do investigador é compreender com bastante detalhe o que os intervenientes pensam.

Tendo em atenção os objetivos deste estudo, a utilização de uma metodologia de natureza qualitativa pareceu ser a que melhor podia responder às questões colocadas. A investigadora optou por observar um número de aulas significativo, por forma a facilitar quer a sua integração quer a compreensão do contexto de aprendizagem dos alunos.

A recolha de dados fez-se no ambiente de sala de aula e pretende-se que seja baseada nas descrições das aulas e nos registos dos alunos, quer no caderno diário, nas tarefas ou nos documentos gravados nas calculadoras gráficas.

3.1.2. Estudo de caso

Atendendo a que o estudo é concretizado numa turma onde todos os alunos são participantes, optou-se por escolher um grupo de alunos de menor dimensão, permitindo assim uma observação mais detalhada e consequentemente respostas mais eficazes às questões de investigação. Considera-se estar perante um estudo de caso, de acordo com a definição apresentada por vários autores.

Bogdan & Biklen (1994), consideram que "o estudo de caso consiste na observação detalhada de um contexto ou indivíduo, de uma única fonte de documentos ou de um acontecimento específico (p. 89).

Numa das suas publicações, Ponte (1994c), também se refere ao estudo de caso:

> Um estudo de caso é caracterizado como incidindo numa entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o seu "como" e os seus "porquês", fazendo justiça à sua unidade e identidade próprias. Assume-se como uma investigação particularística, procurando descobrir o que nela há de mais essencial e característico e, desse modo contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse (p. 2).

O autor apresenta também três características do estudo de caso: uma pesquisa com um forte cunho descritivo, na qual o investigador pretende compreender a situação sem a modificar; um tipo de investigação onde não se deseja que o comportamento dos participantes seja manipulado; uma investigação que se baseia essencialmente em trabalho de campo ou em análise documental. Além disso, considera que o estudo de caso tanto pode seguir uma perspetiva interpretativa tentando compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes, como uma perspetiva pragmática cuja principal intenção é proporcionar uma perspetiva global, do objeto em estudo, do ponto de vista do investigador.

Atendendo às definições apresentadas e uma vez que através da observação de aulas não se pretende modificar a situação mas sim compreendê-la tal como ela é e mostrar aspetos particulares que a caracterizem, considera-se pertinente a utilização deste *design* de investigação.

3.2. Os participantes

Com este trabalho pretende-se compreender o modo de apropriação e utilização de uma ferramenta (a calculadora gráfica), pelo que se considera pertinente conhecer o meio em que estão inseridos os intervenientes.

Far-se-á uma caracterização da escola e do meio envolvente, da turma, dos grupos de trabalho no decorrer das aulas e a forma como foram selecionados os grupos para o estudo de caso.

3.2.1. A escola e o meio

A presente investigação foi desenvolvida na Escola Básica e Secundária Mestre Domingos Saraiva, escola sede do Agrupamento de Escolas do Algueirão, situada na Freguesia de Algueirão - Mem Martins, no concelho de Sintra.

Com um aglomerado populacional aproximado de cento e vinte mil habitantes, esta zona habitacional abrange uma área de cerca de 2000 hectares, com uma densidade populacional de 60 habitantes por hectare.

O Projeto Educativo do Agrupamento refere a integração de alunos de estratos sociais diferenciados, sendo bastante notável, a proveniência de famílias com baixos recursos, baixa escolaridade e apresentando diversas problemáticas. Salienta, também, um aumento de famílias desempregadas, confirmado pelo número de alunos apoiados pelo Serviço de Ação Social Escolar. E considera que os fatores anteriormente referidos são propícios a situações de indisciplina e insucesso escolar.

A Escola Básica e Secundária Mestre Domingos Saraiva é uma T30 com amplos espaços exteriores, com um Gimnodesportivo e um Polidesportivo. Neste ano letivo, a escola conta com 89 professores e cerca de 1093 alunos, distribuídos por 36 turmas, da seguinte forma:

Tabela 3. 1 - Número de turmas por ano de escolaridade

ANO	NÚMERO DE TURMAS POR ANO
5º	7
6º	7
7º	7
8º	5
9º	5
CEF	3
PIEF	2
TOTAL	36

Como se pode observar da tabela anterior, a Escola contempla apenas turmas do Ensino Básico. Apesar da designação Básica e Secundária, só passará a integrar turmas do Ensino Secundário no ano letivo 2014 / 2015.

3.2.2. A turma

Com vista à realização da investigação, considerou-se a escolha de uma turma de outro professor em detrimento das da investigadora.

Optou-se pela escolha de uma turma cuja professora tivesse a preocupação de integrar na planificação das suas atividades, a calculadora gráfica, e que manifestasse disponibilidade para participar neste estudo. Havia, ainda, a considerar um horário que permitisse à investigadora assistir ao maior número de aulas possível.

Foi solicitada autorização à Direção da Escola (Anexo II) e aos Encarregados de Educação dos alunos da turma (Anexo III) para a participação dos seus educandos no estudo.

A turma, constituída por 27 alunos, 9 do sexo masculino e 18 do sexo feminino, apresentavam, no início do ano letivo, idades compreendidas entre os 13 e os 15 anos, como mostra a tabela seguinte:

Tabela 3. 2 - Idade dos alunos da turma, no início do ano letivo

IDADE	NÚMERO DE ALUNOS
13	24
14	2
15	1

Foi apresentada pela professora, como tendo um comportamento satisfatório. Ao nível do aproveitamento, a professora referiu que apesar de haver alunos com bom aproveitamento, também existiam alunos com bastantes dificuldades na disciplina de Matemática.

3.2.3. Os grupos de trabalho no decorrer das aulas

A organização dos grupos foi definida de acordo com a natureza das tarefas propostas. No decorrer das aulas os alunos organizaram-se de diferentes formas: trabalho individual, em grupos de dois ou mais alunos e no grupo turma, principalmente, quando se tratava de discutir resultados, delinear estratégias ou tirar conclusões.

Independentemente da forma de trabalho, os alunos, na sua maioria, participaram com empenho na realização das tarefas propostas.

3.2.4. Seleção dos alunos para o estudo de caso

Para compreender de que forma a professora e os alunos utilizavam a calculadora gráfica, procedeu-se à observação de um conjunto de aulas relativas ao tópico em estudo.

Após essa observação, optou-se pela realização de um estudo de caso a três pares de alunos com desempenho académico distinto e que utilizassem a calculadora gráfica de forma diversificada.

Pelo facto de as calculadoras gráficas serem em número reduzido, sempre que esta ferramenta era utilizada, a professora recorria ao trabalho de grupo.

Para que não fossem efetuadas alterações significativas à metodologia utilizada, com a ajuda da professora da turma, foram selecionados os pares:

(F e M), ambas as alunas com um ótimo comportamento e bom aproveitamento em todas as disciplinas. Sempre que possível, distinguem a forma de resolução das tarefas (gráfica ou analítica), passam facilmente de uma para a outra e de forma correta;

(J e L), um par constituído por uma rapariga e um rapaz, com comportamento e aproveitamento satisfatórios, utilizam a calculadora essencialmente quando lhes é dada essa indicação e fazem-no corretamente.

(D e R), um rapaz e uma rapariga, com comportamentos distintos mas aproveitamento semelhante, que varia entre o insuficiente e suficiente. Apesar de revelarem dificuldades na resolução analítica, um dos elementos utiliza a calculadora gráfica com alguma destreza, pelo que, se não for dada indicação em contrário, o grupo começa por resolver as tarefas graficamente, tentando depois passar para a representação analítica.

Apesar de os pares revelarem alguma heterogeneidade, ao longo do estudo, todos os alunos se mostraram interessados em participar.

4. RECOLHA DE DADOS

Neste capítulo serão apresentados os principais procedimentos adotados e os instrumentos utilizados na recolha de dados.

4.1. Procedimentos

Para proceder à recolha de dados foram percorridas as etapas seguintes:

1.ª - Informar a Direção da Escola sobre a intenção de realizar o estudo e solicitar autorização para que este pudesse ser implementado, dando a conhecer os principais objetivos (Anexo II);

2.ª – Solicitar a autorização dos Encarregados de Educação para que os seus educandos pudessem participar (Anexo III);

3.ª – Iniciar o processo de recolha de dados.

A recolha de dados foi concretizada no ano letivo 2013 / 2014, numa turma do 8.º ano de escolaridade, entre fevereiro e abril. Baseou-se em três técnicas: (i) observação de aulas; (ii) tarefas propostas aos três grupos (seis alunos) que constituem o estudo de caso e (iii) recolha seletiva de documentos produzidos pelos alunos.

No que respeita à observação de aulas, foram observadas treze aulas de 45 minutos e seis de 90 minutos, conforme a tabela seguinte:

Tabela 4. 1 - Número de aulas por tema

TEMA	NÚMERO DE AULAS (de 45`)	NÚMERO DE AULAS (de 90`)
Funções	9	2
Sistemas de Equações	4	4
TOTAL	13	6

Os três conjuntos de tarefas propostos a cada um dos pares de alunos participantes no estudo de caso serão descritos, mais à frente, nos instrumentos utilizados na recolha de dados.

Os documentos recolhidos foram de dois tipos: documentos respeitantes ao percurso escolar dos alunos e documentos que dizem respeito às suas produções, nomeadamente a resolução de determinados exercícios e tarefas bem como gravação de processos utilizados na resolução gráfica das tarefas.

As provas escritas de avaliação de conhecimentos foram utilizadas essencialmente para verificar a evolução das aprendizagens, não se considerando que as classificações obtidas sejam exclusivamente resultado da utilização da calculadora gráfica.

4.2. Instrumentos

Pretende-se que os instrumentos de recolha de dados utilizados permitam recolher dados fiáveis de modo a dar resposta às questões de investigação anteriormente apresentadas e considera-se que cada instrumento terá particular grau de importância nesse processo.

4.2.1. Observação de aulas

Para este estudo, foram observadas onze aulas referentes ao tópico Funções e oito referentes ao tópico Sistemas de duas Equações do 1.º grau a duas incógnitas, que se desenrolaram em torno de diversas tarefas propostas pela professora de Matemática da turma.

A observação deste número de aulas prende-se, por um lado, com o facto de integrar a investigadora no contexto de sala de aula e, por outro lado, proporcionar-lhe uma visão mais aprofundada da abordagem que é feita aos temas em estudo, permitindo uma melhor compreensão do modo como os alunos se apropriam da calculadora gráfica e a utilizam na resolução das tarefas propostas.

As aulas, foram conduzidas pela professora, e, sempre que possível, os conceitos foram introduzidos a partir de exemplos concretos, tendo em vista a sua compreensão nesse contexto.

Os alunos pareciam estar habituados a esta abordagem. No decorrer das aulas, iam escrevendo as suas notas, elaborando as suas sínteses e esquematizando os seus raciocínios. De um modo geral, mostraram-se participativos nas atividades propostas, que variaram entre exercícios, problemas e tarefas de exploração, sendo classificadas, segundo Ponte (2005) em tarefas de desafio matemático reduzido/elevado, com duração curta/média. Realizaram as atividades individualmente, ou em grupo, interagindo com os colegas e com o professor, e por vezes, pediram a colaboração da investigadora.

A investigadora enquadrou-se no contexto descrito e, procedendo de acordo com os diferentes momentos da aula, efetuou dois tipos de observação descritos por Costa (1986), como observação direta e observação participante. Nos momentos de exposição por parte da professora, a investigadora dirigia-se para o fundo da sala onde procedia ao registo das intervenções da professora e dos alunos, considerando-se assim que a observação é direta. Nos momentos em que os alunos estavam a trabalhar, individualmente ou em grupo, a investigadora optou por duas estratégias: (i) circulava pela sala esclarecendo dúvidas, quando solicitada, por forma a ajudar os alunos a ultrapassarem as suas dificuldades; ou (ii) sentando-se perto dos alunos para compreender os seus modos de trabalho e raciocínios desenvolvidos para de seguida proceder às suas anotações. Assim, encontrava-se numa situação de observadora participante, de tal forma integrada na turma que a sua presença no grupo não altera o comportamento dos alunos na sala de aula.

4.2.2. Concretização das aulas

No início de cada aula, após verificar o trabalho que havia sido realizado em casa, a professora, fazia uma breve introdução. Apresentava as atividades a desenvolver e os respetivos objetivos, estabelecendo, sempre que possível, ligação entre a(s) aula(s) anterior(es).

Os alunos encontravam-se sentados a pares, segundo a planta estipulada em Conselho de Turma. Era assim que trabalhavam a maioria das vezes, expunham a sua opinião, discutiam resultados e ajudavam-se mutuamente. Nas aulas em que fosse necessário um trabalho mais individualizado ou grupos maiores, nomeadamente no trabalho com recurso à calculadora gráfica, essa indicação era dada pela professora.

De seguida será apresentada uma descrição das aulas, onde se pode observar o trabalho desenvolvido pelos alunos, nomeadamente ao nível das estratégias e dificuldades apresentadas, bem como o modo de utilização da calculadora gráfica. Esta descrição encontra-se organizada em dois momentos, cada um dos quais corresponde ao tópico estudado. Ao primeiro momento corresponde o tópico das Funções e ao segundo momento corresponde o tópico dos Sistemas de Equações do 1.º grau a duas incógnitas.

4.2.2.1. 1.º Momento - Tópico das Funções

- Primeira aula (05/02/14)

  Duração: 90 minutos

  Sumário: Introdução ao estudo das Funções: Revisões do 7.º ano.

A aula teve início com a intervenção da professora indicando os conteúdos a serem abordados na revisão de matérias lecionadas no 7º ano e a metodologia de trabalho (trabalho a pares). De seguida representou, no quadro, três diagramas de setas e colocou a questão:

Professora: Alguém sabe dizer se estas correspondências representam Funções, e porquê?

Foram vários os alunos que responderam corretamente.

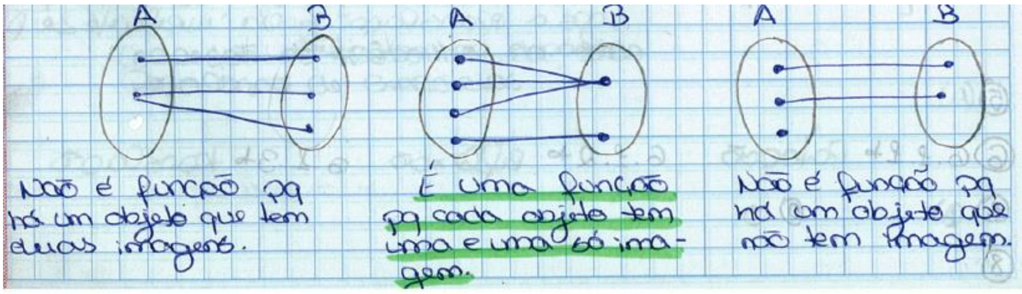


Figura 4. 1 - Exemplo de resposta de uma aluna para identificar Funções

Aluna: Mas no ano passado vimos outras formas de representar Funções.
Professora: Lembra-se? Então diga lá.

A aluna foi dizendo e esquematizando:

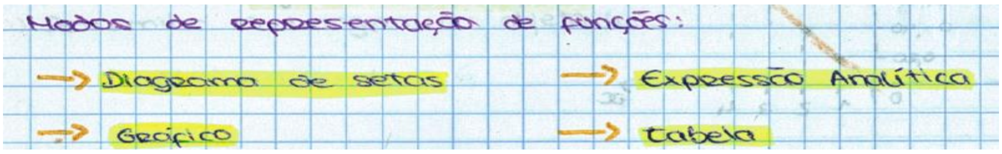


Figura 4. 2 - Exemplo de resposta de uma aluna para distinguir os modos de representar Funções

Professora: Muito bem! E lembram-se de mais alguma coisa que tenham falado quando estudaram Funções?
Aluno: Também falamos em domínio e contradomínio, conjunto de partida e conjunto de chegada.

A professora representa, no quadro interativo, o diagrama e questiona os alunos sobre esses conteúdos:

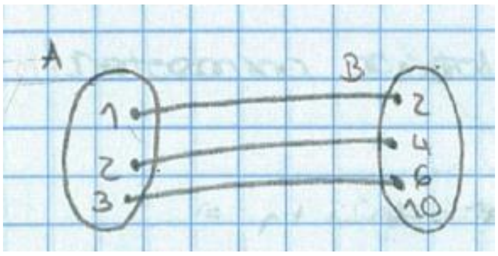


Figura 4. 3 - Diagrama representado no quadro interativo

Obtém como resposta:

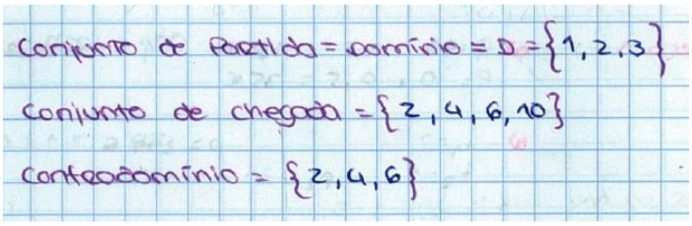


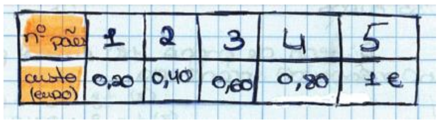
Figura 4. 4 - Exemplo de resposta de um aluno ao identificar domínio, contradomínio e conjunto de chegada

Professora: Porque é que o número 10 não consta no contradomínio?
Aluna: Porque não é imagem de nada.
Professora: Muito bem! Agora vamos considerar uma Função representada através de uma tabela.

Aluno: Pode ser uma qualquer?

Professora: Sim. Podemos ir à padaria comprar pão.

E representa no quadro a seguinte tabela que os alunos copiam para o caderno.

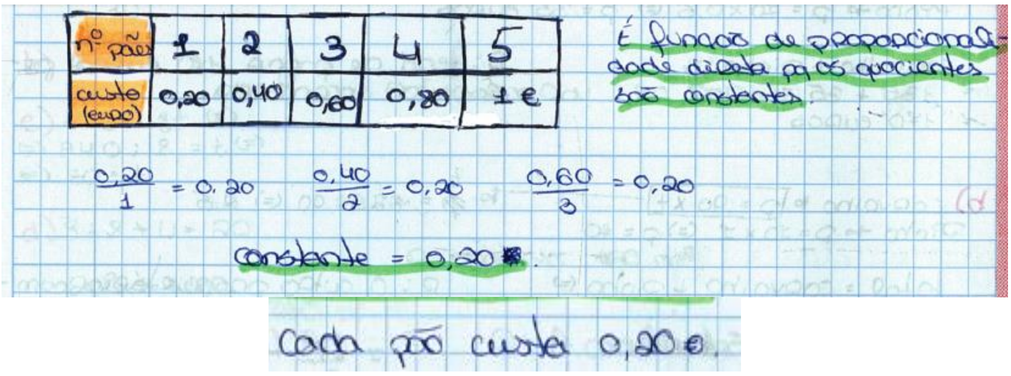


nº pães	1	2	3	4	5
custo (euro)	0,20	0,40	0,60	0,80	1 €

Figura 4. 5 - Tabela representada no quadro interativo

Professora: Agora vão calcular a razão entre o custo e o número de pães e a seguir digam-me alguma coisa.

Uma aluna apresenta a seguinte resposta:



nº pães	1	2	3	4	5
custo (euro)	0,20	0,40	0,60	0,80	1 €

É função de proporcionalidade direta pq os quocientes são constantes.

$\frac{0,20}{1} = 0,20$ $\frac{0,40}{2} = 0,20$ $\frac{0,60}{3} = 0,20$

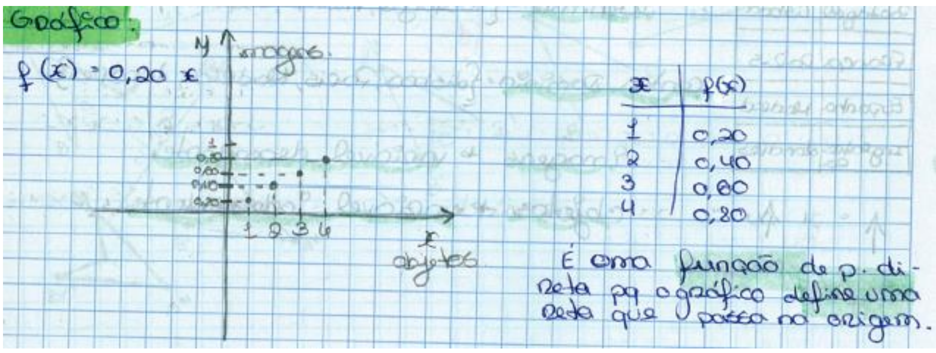
constante = 0,20 €.

Cada pão custa 0,20 €.

Figura 4. 6 - Resposta de uma aluna para determinação da constante de proporcionalidade direta e seu significado

Professora: À medida que forem terminando, podem representar esta Função graficamente.

Uma das respostas é apresentada da seguinte forma:



x	f(x)
1	0,20
2	0,40
3	0,60
4	0,80

Figura 4. 7 - Resposta de uma aluna para a representação gráfica (manual) de uma situação de proporcionalidade direta

[Observando o trabalho desenvolvido por este grupo, a investigadora questiona]

> Investigadora: Agora vão unir os pontos que obtiveram?
> Uma das alunas: Mas não compramos um pão e meio, então tem que ficar assim.
> Professora: Ouviram a resposta da vossa colega? Repita lá se faz favor.
> [A aluna repetiu].
> Os outros alunos: Pois é, tem razão.

Durante a aula, foram surgindo vários conceitos e exemplos. Os alunos foram passando de umas representações para as outras, sem aparentes dificuldades. Apresentam várias representações da mesma Função e evidenciam compreender o conceito de proporcionalidade direta bem como o significado da constante de proporcionalidade.

Após esta revisão, a professora encaminhou os alunos para a resolução da tarefa 1 da página 100 do manual adotado. (Pereira & Pimenta, 2011, p. 100) (Anexo IV)
A tarefa foi apresentada como um problema cujo principal objetivo era recordar conceitos algébricos de Funções e de Equações.

Os alunos iniciaram a leitura e à medida que iam resolvendo, questionavam, quando necessário, a professora ou a investigadora. Nas primeiras alíneas não demonstraram dificuldade, mas na alínea c) já se notou alguma hesitação tanto na interpretação do enunciado como na escrita da equação. Uma das respostas apresentadas foi a seguinte:

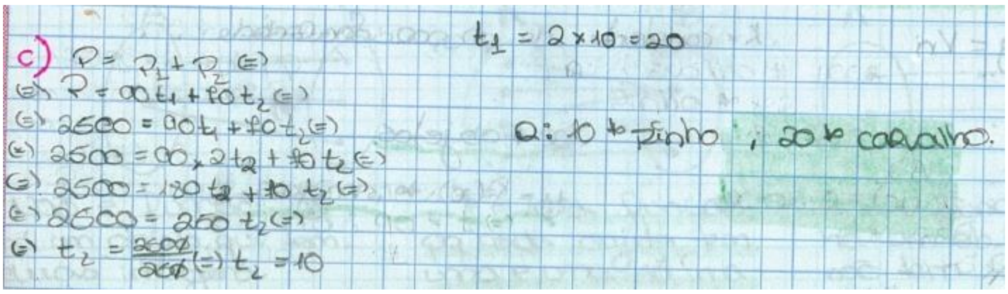


Figura 4. 8 - Exemplo de um esquema e resolução da alínea c) da tarefa 1, pagina 100 do manual

Relativamente ao significado da constante de proporcionalidade, este conceito parece ter sido interiorizado. Os alunos respondem de forma correta a esta questão:

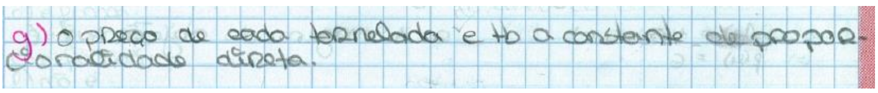


Figura 4. 9 - Exemplo de resposta à alínea g) da tarefa 1, página 100 do manual

À medida que os problemas vão sendo resolvidos, nota-se maior confiança nos raciocínios efetuados e na tradução dos enunciados. Embora já sem tempo para resolver a última alínea, uma aluna quis ainda apresentar o que tinha escrito:

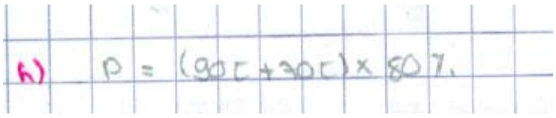


Figura 4.10- Exemplo de resposta à alínea h) da tarefa 1, página 100 do manual

Já nos últimos minutos da aula, a professora, indica no quadro a tarefa que os alunos tinham para trabalho de casa, e mais uma vez refere o objetivo. Trabalho para casa: Tarefa 2 da página 101 do manual (Pereira & Pimenta, 2011, p. 101), (Anexo V), cujo objetivo é consolidar o conceito de proporcionalidade direta.

Balanço da aula:

Nesta aula, os alunos recordaram vários conceitos algébricos de Funções e de equações e transitaram entre eles. Recordaram o conceito de proporcionalidade direta e o significado da constante de proporcionalidade.

- Segunda aula (06/02/14)

  Duração: 45 minutos

  Sumário: Correção do trabalho de casa.

A professora inicia a aula questionando os alunos sobre a realização do trabalho proposto para realização em casa e solicita voluntários para corrigir no quadro.

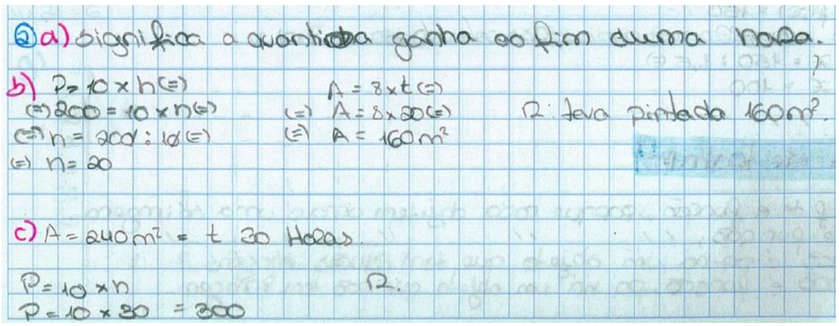


Figura 4. 11 - Exemplo de resposta ao exercício 2 da tarefa 2, página 101 do manual

Na realização das tarefas anteriormente apresentadas, nota-se que os alunos compreenderam o significado da constante de proporcionalidade direta e determinam corretamente a imagem de um determinado objeto. São ainda notórias algumas dificuldades na determinação de um objeto quando é fornecida a respetiva imagem.

No final da aula, a professora, explicou aos alunos a importância que considera terem as Funções, e refere que na próxima aula irão continuar a trabalhar este tema.

Balanço da aula:

A aula decorreu dentro da normalidade. Os alunos mostraram-se empenhados no trabalho com Funções de proporcionalidade direta, apesar de trabalharem apenas com a expressão algébrica. A correção dos exercícios e a sua discussão no grupo turma revelaram-se importantes quer para o esclarecimento de dúvidas, quer para a consolidação dos conteúdos.

- Terceira aula (07/02/14)
  Duração: 45 minutos
  Sumário: Correção do trabalho de casa.
  Resolução de exercícios sobre Funções.

Nesta aula, a professora, deu continuidade à correção do trabalho de casa iniciado na aula anterior.

Seguiram-se outros exercícios da autoria da professora, tendo como principal objetivo a compreensão de conceitos como objeto e imagem.

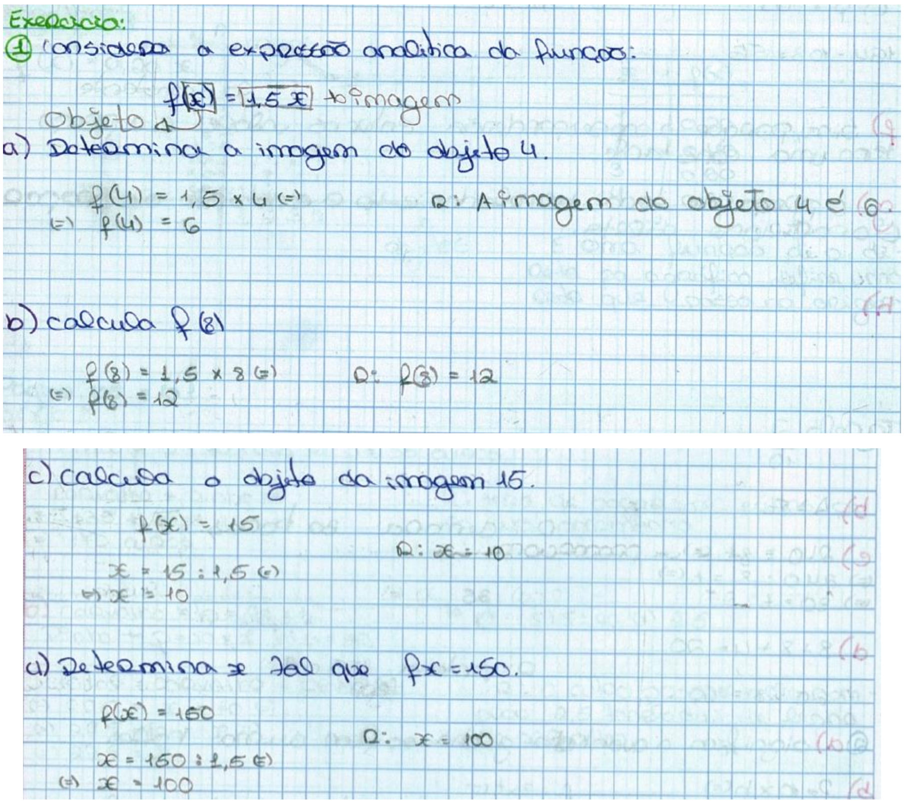


Figura 4. 12- Exemplo de resposta de um aluno para determinar objetos e imagens de uma Função

Terminados estes exercícios, a professora projeta a Ficha de Trabalho intitulada Revisões sobre Funções (Anexo VI). Segue-se a informação sobre o envio da ficha para o *email* da turma e uma breve apresentação da mesma com a indicação de resolução em casa.

Balanço da aula:

Nesta aula foram trabalhados os conceitos de objeto e imagem, que, segundo a professora, os alunos tendem em confundir. A dificuldade prendeu-se sobretudo com a determinação do objeto dada a imagem. Enquanto na determinação da imagem dado o objeto, os alunos têm apenas que efetuar um cálculo numérico para responderem, quando lhes é pedido para determinar uma imagem dado o objeto, obtêm uma equação o que lhes dificulta a resolução. Talvez esta dificuldade na manipulação algébrica possa ser ultrapassada com a resolução gráfica recorrendo à calculadora gráfica.

- Quarta aula (11/02/14)

  Duração: 45 minutos

  Sumário: Correção do trabalho para casa.

  Resolução de uma Ficha de Trabalho.

No início da aula, a professora questionou os alunos sobre a realização do trabalho de casa e eventuais dúvidas.

Seguiu-se a projeção, no quadro interativo da Ficha de Trabalho e explicitação do objetivo a ela inerente – identificar Funções e transitar entre as diferentes representações.

Apresenta-se como exemplo a resolução de alguns exercícios:

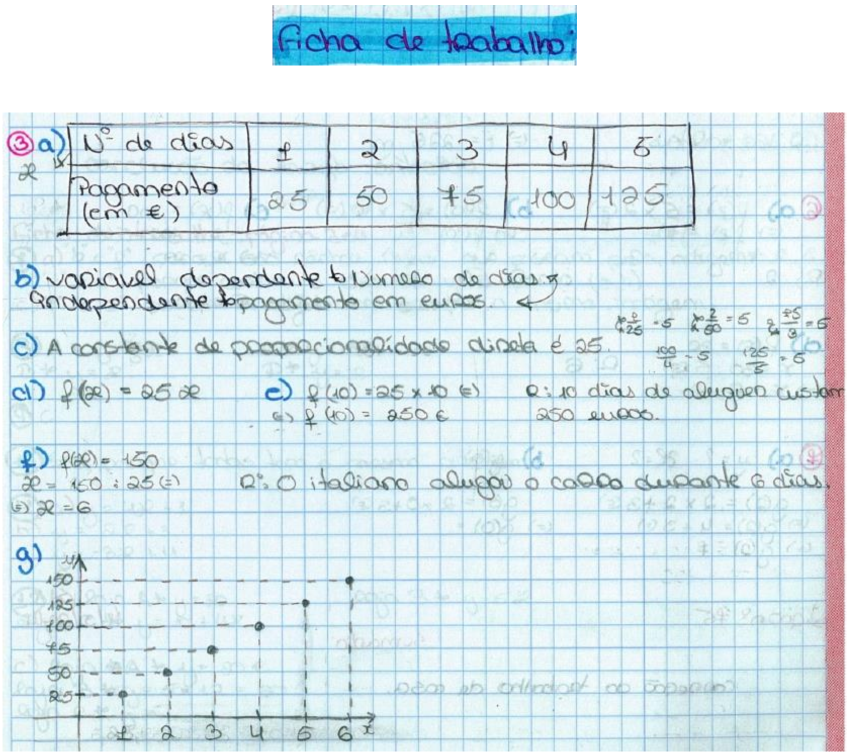


Figura 4. 13 - Exemplo de resolução do exercício 3 da ficha de trabalho sobre Funções

Na resolução deste exercício ainda é evidente a dificuldade dos alunos em identificarem objetos e imagens e consequentemente a variável independente e dependente.

Balanço da aula:

Após a resolução de um grupo de exercícios individualmente, a sua correção foi realizada no grande grupo. Os alunos tiveram oportunidade de esclarecer as suas dúvidas, discutir resultados e tirar conclusões.

- Quinta aula (12/02/14)
  Duração: 90 minutos
  Sumário: Resolução de uma tarefa sobre Funções com recurso à calculadora gráfica.

A professora começou por definir a metodologia de trabalho solicitando aos alunos para se organizarem em grupos de quatro, no sentido de trabalharem com a calculadora gráfica. Enquanto isto, abria, no quadro interativo, a calculadora gráfica que tinha instalado no computador da sala de aula, com a qual costuma trabalhar (Anexo VII).

De seguida encaminhava os alunos para a resolução da TAREFA MATEMÁTICA (1) (Anexo VIII), apresentava a tarefa e fazia o seu enquadramento nos problemas da vida real.

Os alunos iniciaram a leitura da tarefa e foram respondendo à questão a) sem questionar a professora ou a investigadora, que circulava pela sala para compreender que dificuldades os alunos iam evidenciando, que discussões surgiam e de que forma resolviam cada uma das questões: se analiticamente, graficamente ou utilizando ambas as representações e, ainda, que uso faziam da calculadora gráfica.

Após a interpretação do enunciado da questão b), um grupo de alunos, chegou à conclusão que as 10 horas e 30 minutos tinham que ser substituídas por 11 horas, e referem que o tarifário não contempla os minutos. De seguida quiseram partilhar essa conclusão com a professora e restantes elementos da turma.

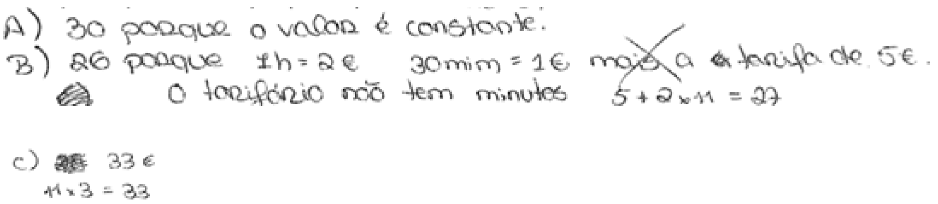


Figura 4. 14 - Exemplo de resolução da questão b) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Na questão e), um grupo apresenta a seguinte resolução:

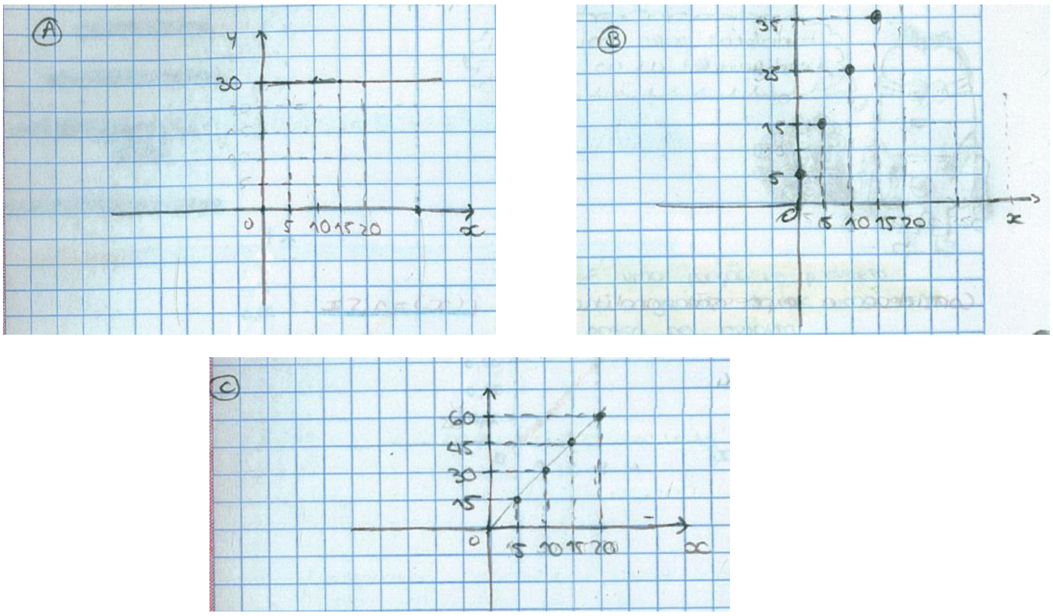


Figura 4. 15 - Exemplo de resolução da questão e) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

[Após verificar que tinham representado separadamente cada uma das Funções, a investigadora questionou os elementos do grupo]

Investigadora: Porque representaram cada uma das Funções num referencial diferente?

Enquanto liam novamente o enunciado, um dos elementos responde: Não vimos que era pedido para serem todas representadas no mesmo referencial. Mas já se resolve…

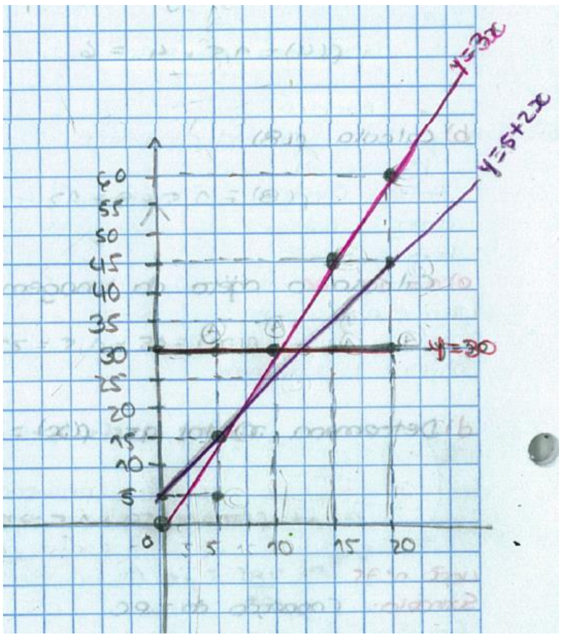


Figura 4. 16 - Exemplo da nova resolução da questão e) do Guião das tarefas Matemáticas (1)

De referir que, ao representarem todas as Funções no mesmo referencial, identificaram-nas com a sua expressão algébrica, necessidade que não tinham sentido anteriormente.
Um dos elementos do grupo, pegando na calculadora gráfica, diz: Vamos ver se está tudo bem!

Introduziram as três expressões algébricas, com a janela de visualização que se pode observar:

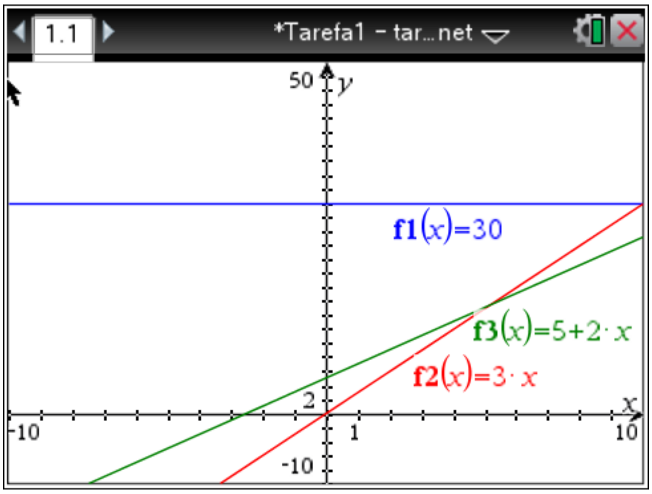


Figura 4. 17 - Representação gráfica das Funções antes da atualização da janela de visualização

[Um dos elementos do grupo comenta]

Elemento do grupo: Não se vê tudo, temos que alterar a janela. É assim que a professora faz.

E apresenta a seguinte representação gráfica com uma nova janela de visualização.

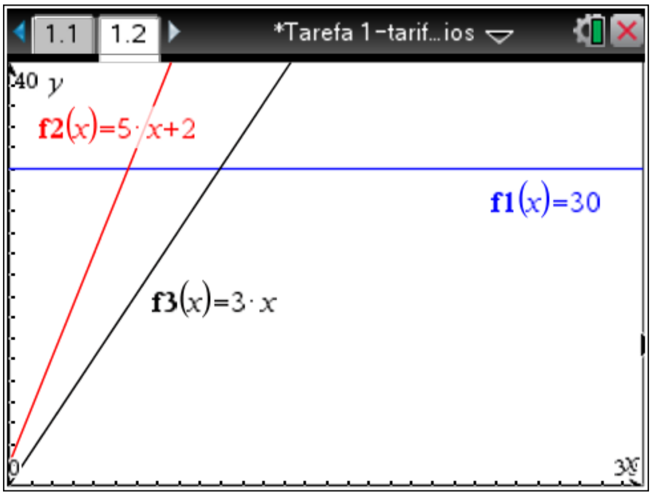


Figura 4. 18 - Representação gráfica das Funções após a atualização da janela de visualização

Outro elemento do grupo: Veja professora, está igual à nossa. Agora podemos resolver a alínea f, a partir daqui.

A turma continua a resolução da tarefa, e quando chegam à alínea f, um grupo apresenta a seguinte representação esquematizada com as letras de cada uma das empresas A, B e C.

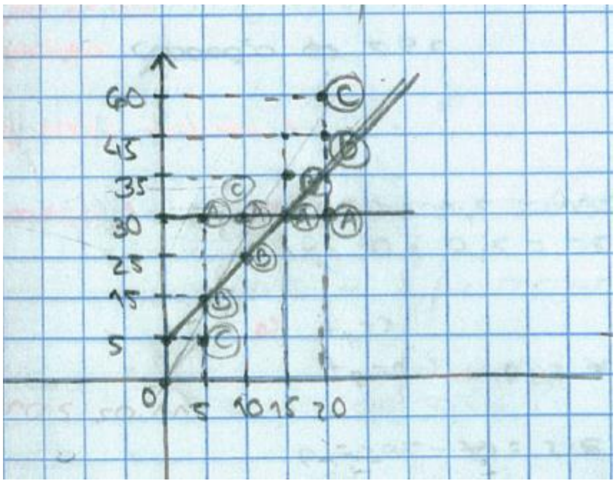


Figura 4. 19 - Exemplo de resolução da questão f) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

De seguida, a professora disponibilizou alguns minutos para os grupos terminarem as questões às quais ainda não tinham respondido. Após esse tempo questionou sobre as alíneas que tinham suscitado mais dúvidas.

Obteve como resposta as alíneas b) e f).

Como a aula se aproximava do seu términus, não restava mais tempo para esclarecer estas questões. Assim, a professora agendou a sua correção para a aula seguinte.

Balanço da aula:

A aula decorreu com muita normalidade, apesar de alguma agitação própria da realização de tarefas em grupo.

Os alunos foram capazes de manipular os conceitos e utilizaram várias representações para cada uma das Funções.

A questão da alínea b) que referia 10 horas e meia, causou alguma discussão saudável entre os alunos e serviu para refletirem sobre a interpretação que faziam dos enunciados.

Na resposta à alínea f), pretendia-se que os alunos elaborassem uma composição matemática, mas nesse campo não se mostraram muito à vontade. Notou-se alguma dificuldade na expressão das ideias.

No que concerne à utilização da calculadora gráfica, os alunos encontravam-se numa fase de instrumentalização pelo que a utilizaram essencialmente como ferramenta para confirmação de resultados, resolvendo em primeiro lugar as tarefas recorrendo ao lápis e papel.

Foi a partir da observação desta aula que, com a ajuda da professora, foram escolhidos os três pares de alunos para o estudo de caso.

- Sexta aula (13/02/14)
  Duração: 45 minutos
  Sumário: Conclusão da tarefa sobre Funções da aula anterior.
  Exploração de Funções com a calculadora gráfica.

No início desta aula, após a escrita do sumário, a professora fez um resumo das três Funções trabalhadas na aula anterior e os alunos foram elaborando os seus registos:

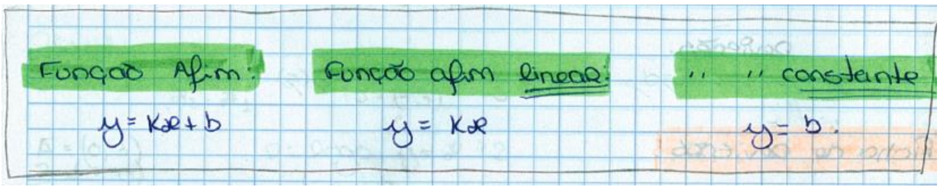


Figura 4. 20 - Registo de um esquema das Funções estudadas

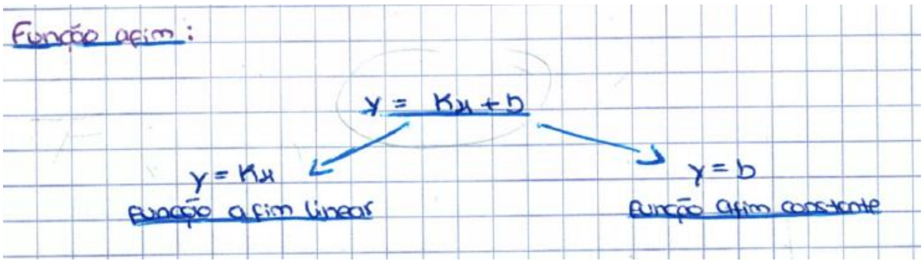


Figura 4. 21 - Registo de outro esquema das Funções estudadas

Em segundo lugar, retomaram as questões b) e f) que haviam ficado por esclarecer. A questão b) foi esclarecida, pela professora, partindo da resolução que o grupo mencionado anteriormente tinha apresentado.

Relativamente à questão f), a professora, solicitou aos alunos que representassem novamente as três Funções na calculadora gráfica e de seguida interpretassem os gráficos.

> Professora: Se o Francisco utilizasse pouco tempo a internet, menos de 5 horas, que tarifário aconselhavam?
> Aluno: O tarifário C, porque só pagava no máximo 12€. Se utilizar 5 horas pode escolher o B ou o C, paga o mesmo.

Professora aponta para os respetivos gráficos e para o ponto de intersecção das retas $y = 3x$ e $y = 2x + 5$, acompanhando o raciocínio do aluno.

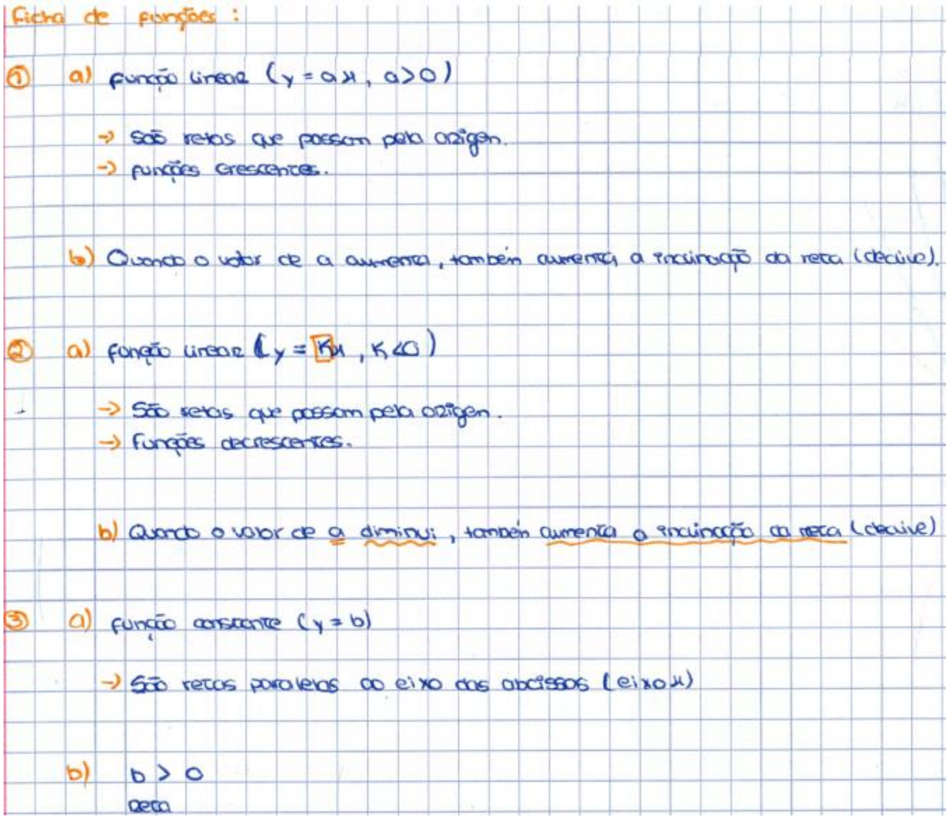
> Professora: Muito bem, continuem estes raciocínios, e elaborem a vossa composição.
> Outro aluno: Ah. Então entre as 5 e as 12 horas deve utilizar o tarifário B. A partir daí compensa o tarifário fixo (A). Então era este que aconselhava ao Francisco, porque ele utiliza cerca de 20 horas a internet.

Terminada esta tarefa, a professora perguntou aos alunos se restou alguma dúvida. Ao que responderam pode continuar.

Seguiu-se a resolução da Ficha de Trabalho "Exploração de Funções com Calculadora Gráfica: Funções do Tipo $y = kx$; $y = b$ e $y = kx + b$" (Anexo IX), cujo objetivo era explorar a influência dos parâmetros *k* e *b* nas Funções mencionadas.

A professora deu algum tempo para os alunos pensarem e resolverem as questões. Solicitou aos alunos o registo das conclusões à medida que fossem explorando as várias situações propostas.

De referir que na resolução desta tarefa os alunos solicitaram a utilização da calculadora gráfica.


Ficha de funções:

① a) função linear $(y = ax , a>0)$

→ São retas que passam pela origem.

→ funções crescentes.

b) Quando o valor de a aumenta, também aumenta a inclinação da reta (declive).

② a) função linear $(y = \boxed{k}x , k<0)$

→ São retas que passam pela origem.

→ Funções decrescentes.

b) Quando o valor de a diminui, também aumenta a inclinação da reta (declive)

③ a) função constante $(y = b)$

→ São retas paralelas ao eixo das abcissas (eixo x)

b) $b > 0$

reta

Figura 4. 22 – Exemplo de registo das conclusões por parte de uma aluna

Seguiu-se o exercício 4, e uma aluna apresenta a seguinte resolução:

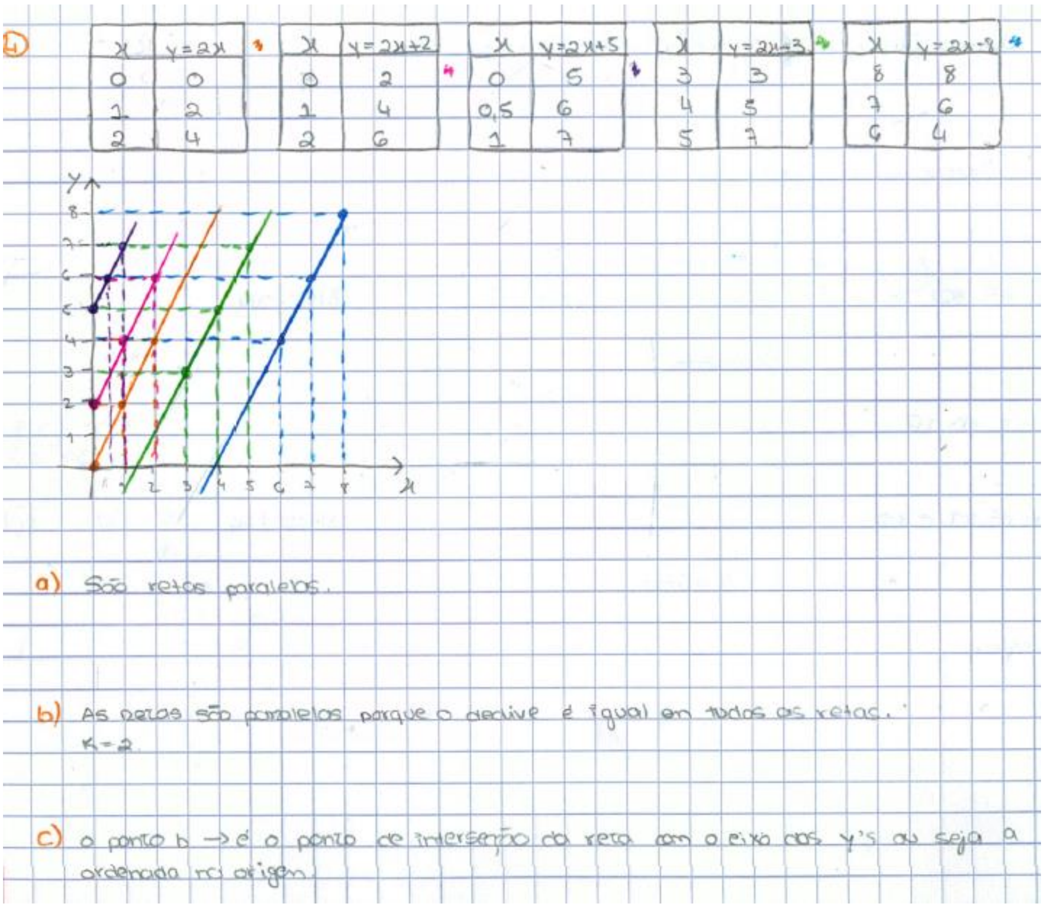


Figura 4. 23 - Exemplo de resolução do exercício 4 da ficha de trabalho “Exploração de Funções com Calculadora Gráfica”, sem recurso e esse artefacto

A aluna utiliza posteriormente a calculadora gráfica para confirmar a representação gráfica que havia registado no seu caderno diário.

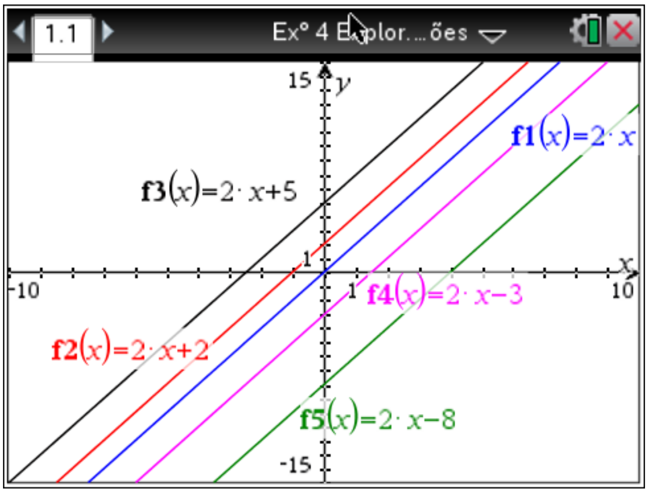


Figura 4. 24 - Exemplo de resolução do exercício 4 da ficha de trabalho “Exploração de Funções com Calculadora Gráfica”, com recurso a esse artefacto

Balanço da aula:

Considera-se importante o espaço que foi dado aos alunos para analisarem cada uma das situações propostas e registarem as suas conclusões.

Na execução destas tarefas, os alunos utilizaram a calculadora gráfica de diferentes modos.

Uns começaram por representar graficamente as Funções no seu caderno diário e só depois confirmaram os resultados com a calculadora gráfica. Mostrando-se surpreendidos com a compatibilidade dos resultados referiram poderem utilizar sempre este artefacto a quando da resolução gráfica de uma tarefa.

Outros, encontrando-se mais familiarizados com a calculadora gráfica, e já numa fase de instrumentação, recorreram logo a este artefacto, o que lhes permitiu representarem as várias Funções mais rapidamente e disponibilizarem mais tempo para as conclusões.

- Sétima aula (14/02/14)
  Duração: 45 minutos
  Sumário: Conclusão das tarefas da aula anterior.

Nesta aula, os alunos continuaram a explorar várias situações, recorrendo só à utilização da calculadora gráfica.

Quando questionados pela investigadora sobre a constante utilização da calculadora gráfica, os alunos responderam:

> Torna-se muito cansativo representar tantas Funções. Com a calculadora gráfica, conseguimos resolver mais rapidamente.

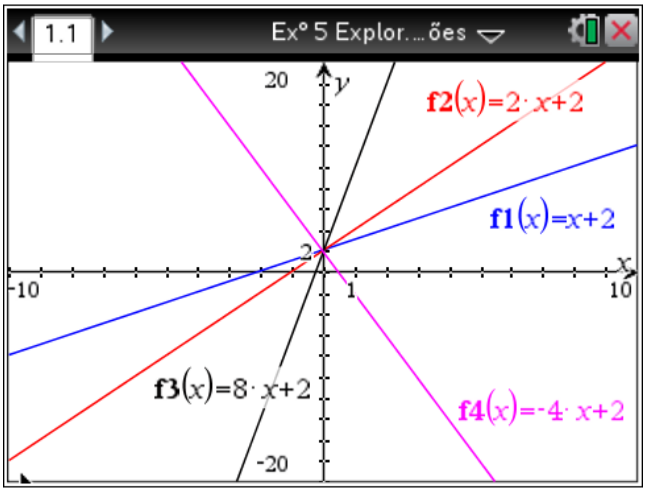


Figura 4. 25 - Exemplo de resolução do exercício 5 da ficha de trabalho "Exploração de Funções com Calculadora Gráfica", com recurso a esse artefacto

Após análise dos gráficos, foram obtidas as respostas às alíneas b) e c):

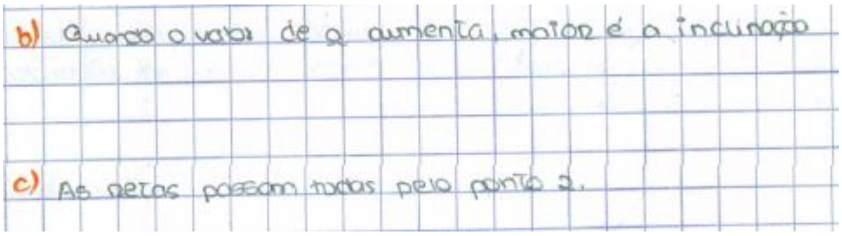


Figura 4. 26 - Exemplo de resposta às alíneas b) e c) do exercício 5 da ficha de trabalho “Exploração de Funções com Calculadora Gráfica”, com recurso à calculadora gráfica

Balanço da aula:

Nesta fase, os alunos já construíam esquemas que lhes permitiam a utilização da calculadora gráfica de um modo mais proficiente. Eram capazes de selecionar as tarefas que deviam resolver com recurso a este artefacto disponibilizando assim mais tempo para as restantes tarefas. Já bastante familiarizados com o seu manuseamento, os alunos mostraram-se adeptos deste artefacto, e utilizaram-no ainda com mais frequência. Mostraram-se conscientes das limitações inerentes ao seu uso, pelo que muitas vezes se ouvia “arranjar a janela”. Compreenderam o efeito dos parâmetros *k* e *b* no comportamento da Função afim.

- Oitava aula (18/02/14)

  Duração: 45 minutos

  Sumário: Conclusão do estudo da Função afim.

Nesta aula, a professora, começou por reforçar a influência de cada um dos parâmetros nas Funções estudadas.

Uma aluna começa por esquematizar essa informação:

Figura 4. 27 - Esquema de uma aluna relativamente ao papel dos parâmetros *k* e *b* numa Função afim

Neste esquema, a aluna identifica o valor de *k* com o declive da reta e o valor de *b* com a ordenada na origem.

Seguiu-se a resolução de outras questões relacionadas com conteúdos até então abordados, nomeadamente da Ficha de Trabalho (Anexo VI).

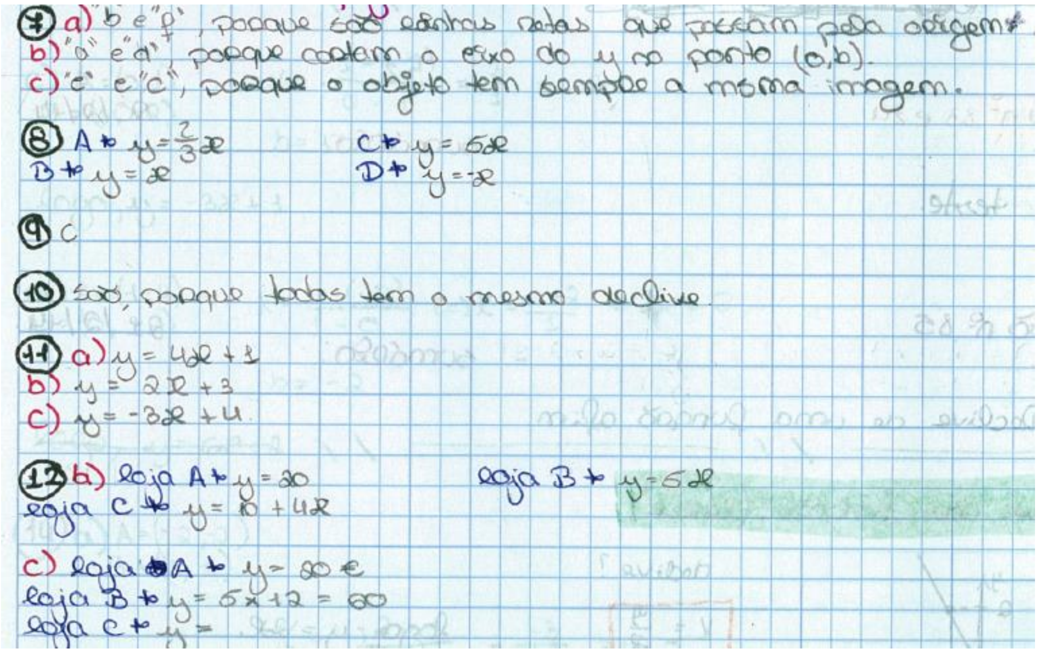

7 a) "b" e "f", porque são ambas retas que passam pela origem.
b) "a" e "d", porque cortam o eixo do y no ponto (0,b).
c) "e" e "c", porque o objeto tem sempre a mesma imagem.
8 A → $y = \frac{2}{3}x$ C → $y = 5x$
B → $y = x$ D → $y = -x$
9 C
10 São, porque todas tem o mesmo declive.
11 a) $y = 4x + 1$
b) $y = 2x + 3$
c) $y = -3x + 4$
12 b) loja A → $y = 20$ loja B → $y = 5x$
loja C → $y = 10 + 4x$
c) loja A → $y = 20$ €
loja B → $y = 5 \times 12 = 60$
loja C → $y =$

Figura 4. 28 - Exemplo de resolução de exercícios da ficha de trabalho Revisões sobre Funções

Balanço da aula:

Os alunos foram resolvendo individualmente os exercícios propostos solicitando, quando necessário, a intervenção da professora ou da investigadora. Quando a solicitação era repetida em determinada tarefa, a professora optava por esclarecer para o grupo turma. Na medida em que as dúvidas propostas foram sendo diminutas, considera-se que os momentos de discussão e reflexão foram essenciais para a aprendizagem dos alunos.

- Nona aula (19/02/14)
  Duração: 90 minutos
  Sumário: Revisões para a Ficha de Avaliação.
  Esclarecimento de dúvidas.

O principal objetivo da presença da investigadora na aula dedicada a revisões e esclarecimento de dúvidas foi reconhecer o desempenho dos alunos e o efeito da utilização da calculadora gráfica na qualidade das suas aprendizagens, no que respeita ao tema das Funções.

Balanço da aula:

A aula decorreu com alguma agitação e ansiedade. Os alunos expuseram as suas dúvidas, que de imediato foram esclarecidas. De seguida recorreram à Ficha de Trabalho – Revisões sobre Funções e procederam ao estudo autónomo a partir da mesma. Esta autonomia no trabalho com Funções, deve-se essencialmente às aprendizagens efetuadas ao longo das aulas e à apropriação que foram fazendo da calculadora gráfica. Nesta altura, os alunos já integram o uso de diferentes representações e transitam entre elas.

A investigadora não esteve presente na aula referente à realização da Ficha de Avaliação.

- Décima aula (21/02/14)
  Duração: 45 minutos
  Sumário: Declive de uma Função afim.

A professora começou por questionar os alunos sobre o conceito de declive.

No que respeita ao declive da Função linear, os alunos, na sua maioria recordavam-se do conceito abordado no 7.º ano.

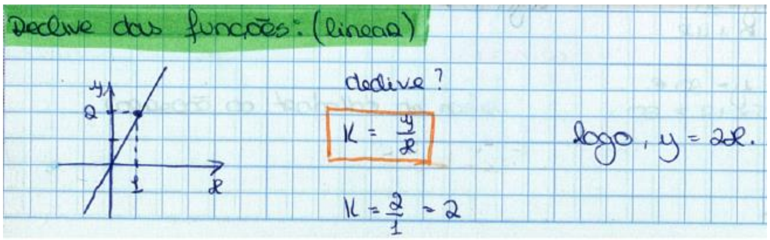


Figura 4. 29 - Esquema para determinar o declive de uma Função linear

Para determinar o declive de uma Função afim, a professora considerou dois pontos de uma determinada reta e calculou o declive, por analogia com o processo usado para calcular o declive da Função linear apresentada anteriormente.

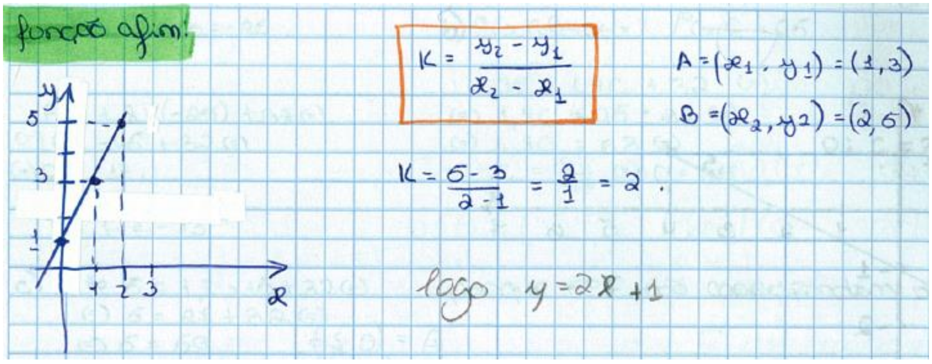


Figura 4. 30 - Esquema para determinar o declive de uma Função afim

Uma vez determinado o valor do declive, esta aluna escreveu a respetiva expressão algébrica.

Investigadora: Porque escreveu essa expressão?

Aluna: Então: ($2x$) é porque o declive é 2 e ($+1$) é porque o gráfico passa no 1.

Investigadora: A ordenada na origem é 1. É isso que quer dizer?

Aluna: É isso sim.

De seguida os alunos resolveram, individualmente, o exercício 12 da página 111 do manual adotado. (Pereira & Pimenta, 2011, p. 111)

Neste exercício pretendia-se que os alunos escrevessem a expressão analítica de cada uma das quatro Funções representadas graficamente. Em cada gráfico era possível observar-se a marcação de dois pontos sendo um deles pertencente ao eixo das ordenadas.

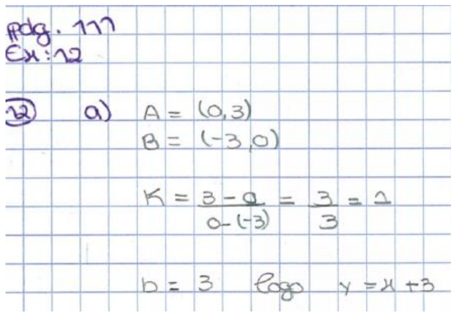


Figura 4. 31 - Exemplo de resolução da alínea a) - exercício12 da página 111 do manual adotado

A partir das coordenadas dos pontos que eram destacados na representação gráfica, os alunos apresentaram um bom desempenho na determinação do parâmetro *k* e na identificação do parâmetro *b*.

De seguida, com recurso à calculadora gráfica, traçaram o gráfico para verificar se de facto a reta passava pelos pontos dados.

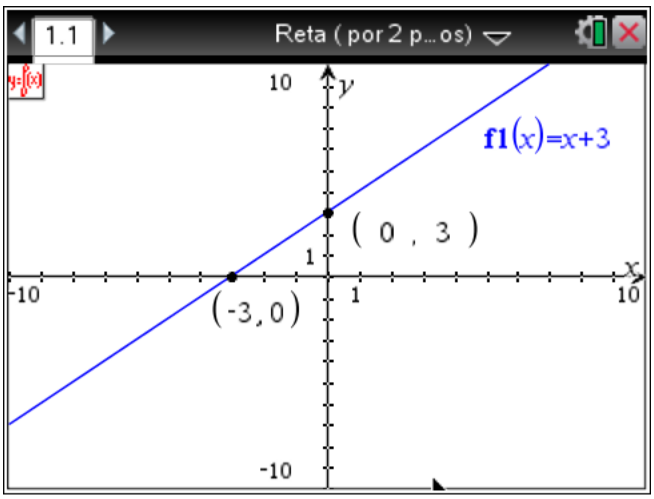


Figura 4. 32 – Gráfico para confirmar a expressão da reta que passa por dois pontos dados

Nestas questões os alunos tiveram um bom desempenho e aproveitaram as potencialidades da calculadora gráfica para influenciarem positivamente a sua resolução.

Tendo como objetivo a consolidação dos conceitos estudados, a professora marcou para trabalho a realizar em casa o exercício 14 da página 111; as tarefas de aplicação de conteúdos das páginas 115, 116, 117; as tarefas 3 e 4 da página 119 e a tarefa 8 da página 120.

Balanço da aula:
O conceito de declive foi trabalhado com bastante ênfase e analisado a partir de diferentes representações de uma determinada Função.
Na realização de tarefas que pretendiam a representação gráfica, os alunos usaram a calculadora de modo proficiente e aproveitaram os resultados obtidos para uma resolução mais eficiente.

- Décima primeira aula (25/02/14)
  Duração: 45 minutos
  Sumário: Correção do trabalho de casa.

Nesta aula, a professora, começou por questionar os alunos sobre a realização das tarefas desenvolvidas em casa e dúvidas que tenham surgido.

Os exercícios foram sendo explicados e corrigidos no quadro.

Balanço da aula:
Esta aula foi essencial para consolidar conteúdos, analisar resultados e discutir estratégias.
Nesta fase final os alunos demonstram terem interiorizado os conceitos estudados. Resolvem as tarefas recorrendo aos processos que consideram mais adequados, analítico ou gráfico e neste último recorrem à calculadora gráfica.

Ficou assim terminado o tópico Funções.

Entretanto, teve lugar o tópico das Equações, e os alunos foram submetidos a mais uma avaliação sumativa. Neste tópico a investigadora não esteve presente nas aulas.

4.2.2.2. 2.º Momento - Tópico dos Sistemas de duas Equações do 1.º grau a duas incógnitas

- Primeira aula (26/03/14)
  Duração: 90 minutos
  Sumário: Resolução de Sistemas de Equações - método de substituição.

A professora, solicitou aos alunos que relembrassem as equações do 1.º grau e equações literais, uma vez que todos esses conceitos seriam necessários para a resolução dos Sistemas de

Equações. Referiu que, embora tivessem resolvido equações literais com várias incógnitas, só iriam resolver Sistemas de duas Equações a duas incógnitas e indicou os vários passos a seguir na sua resolução:

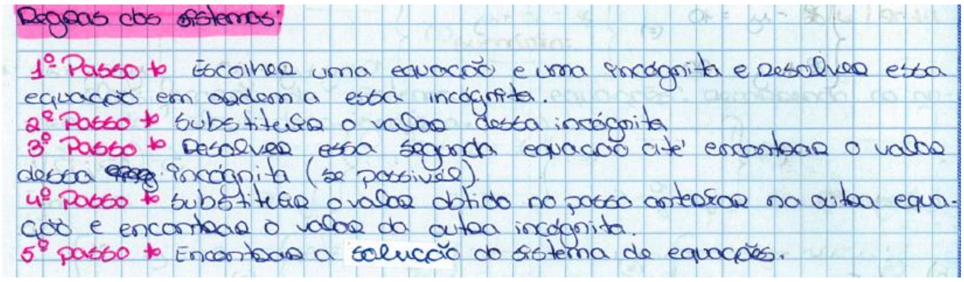
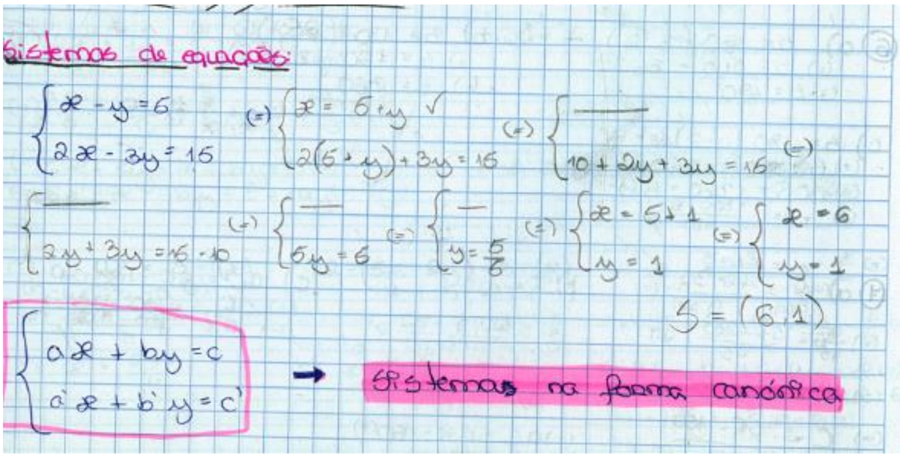

Regras dos sistemas:
1º Passo → Escolher uma equação e uma incógnita e resolver esta equação em ordem a esta incógnita.
2º Passo → Substituir o valor dessa incógnita
3º Passo → Resolver essa segunda equação até encontrar o valor dessa incógnita (se possível)
4º Passo → Substituir o valor obtido no passo anterior na outra equação e encontrar o valor da outra incógnita.
5º passo → Encontrar a solução do sistema de equações.

Figura 4. 33 - Passos para a resolução de Sistemas de Equações pelo método de substituição

Simultaneamente foi resolvendo um Sistema de duas Equações a duas incógnitas utilizando esse processo e fez referência à forma canónica:


Sistemas de equações:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x - 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + y \\ 2(5+y) + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 10 + 2y + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow$$

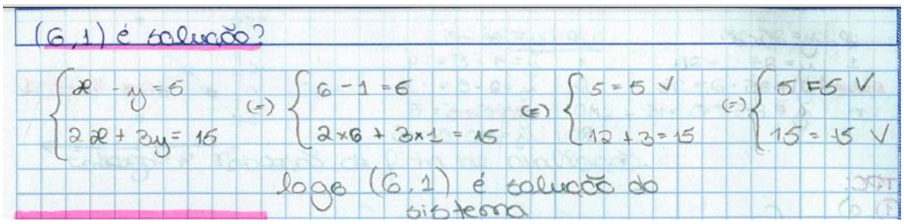
$$\begin{cases} \text{———} \\ 2y + 3y = 15 - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ 5y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ y = \frac{5}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 + 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

$S = (6, 1)$

$$\boxed{\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}} \rightarrow \text{Sistemas na forma canónica}$$

Figura 4. 34 – Resolução de um Sistema de Equações pelo método de substituição

De seguida procedeu-se à verificação do par ordenado como solução do Sistema de Equações:


(6,1) é solução?

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ 2x + 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 1 = 5 \\ 2\times 6 + 3\times 1 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5 \ \checkmark \\ 12 + 3 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 5 \ \checkmark \\ 15 = 15 \ \checkmark \end{cases}$$

logo (6,1) é solução do sistema

Figura 4. 35- Exemplo de resolução de um Sistema de Equações, pelo método de substituição, e verificação do par ordenado como solução

A aula continuou com a resolução de Sistemas de Equações, incluindo agora Sistemas que envolviam Equações com parênteses e denominadores. Relativamente a estes, a professora explicou que começam por desembaraçar, se necessário, de parênteses e denominadores cada uma das equações, a seguir escrevem o Sistema na forma canónica, e, a partir daí repetem todos os passos que aprenderam anteriormente.

Apresentou, no quadro, o Sistema de Equações seguinte: $\begin{cases} x = \dfrac{x-y}{2} \\ 2x - y = x + 4 \end{cases}$

Um aluno começou a sua resolução da seguinte forma:

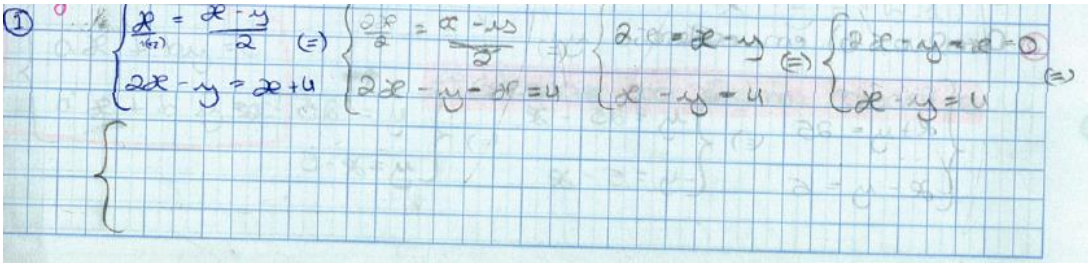


Figura 4. 36 - Tentativa de resolução de um Sistema de Equações, envolvendo equações com denominadores

Este aluno começa por desembaraçar a primeira equação de denominadores e fá-lo corretamente. Ao tentar escrever o Sistema na forma canónica não o fez de forma correta e parou.

Aluno: Professora, penso que não vai dar.

[Entretanto tocou para a saída]

Professora: Numa das próximas aulas vemos isso.

Indicou como trabalho para casa a Ficha de Trabalho “Sistemas de Equações” – (Anexo X) com o objetivo de os alunos exercitarem este processo, e ordenou a saída da sala de aula.

A resposta do aluno “não vai dar” parece estar relacionada com a resolução da primeira equação de forma incorrecta mas que perante esse erro lhe permitiu obter as equações $\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 4 \end{cases}$, e tal situação ainda não tinha sido abordada.

Balanço da aula:

Nesta aula, os alunos sentiram necessidade de relembrar a resolução de equações do 1.º grau a uma incógnita e equações literais. Pôde constatar-se que quando os alunos manifestam dificuldade nos conteúdos referidos são cometidos erros que influenciam o prosseguimento da resolução e classificação dos Sistemas de Equações.

- Segunda aula (27/03/14)

  Duração: 45 minutos

  Sumário: Resolução de Sistemas de Equações - método gráfico.

A professora solicitou aos alunos a resolução do Sistema de Equações seguinte:

$$\begin{cases} x + y = 25 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

O Sistema foi resolvido pelo método anteriormente aprendido:

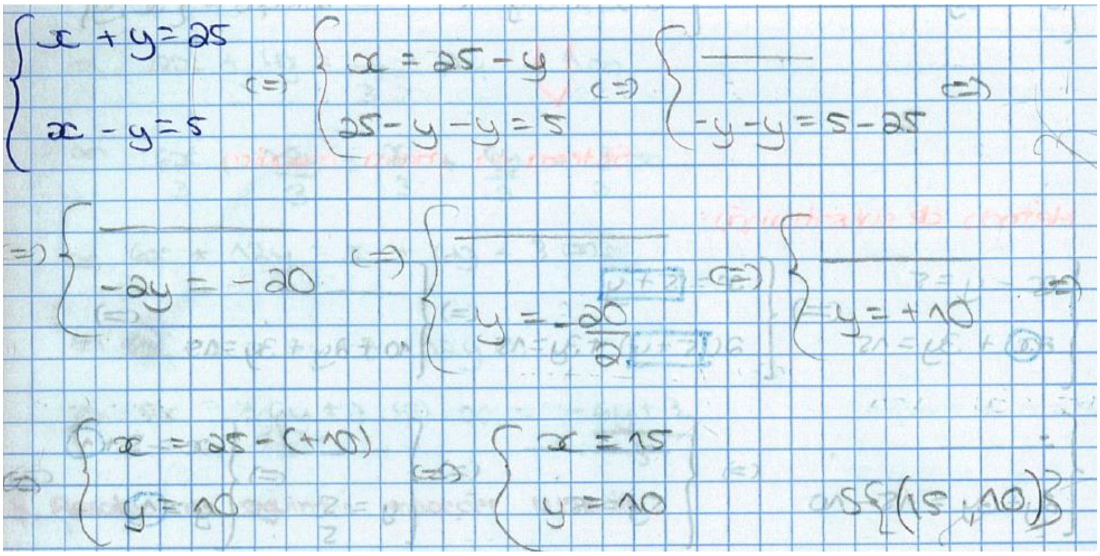


Figura 4. 37 - Exemplo de resolução de um Sistema de Equação pelo método de substituição

Posteriormente foi solicitada aos alunos a resolução de ambas as equações em ordem a y e a sua representação no mesmo referencial.

Uma das respostas obtida foi a seguinte:

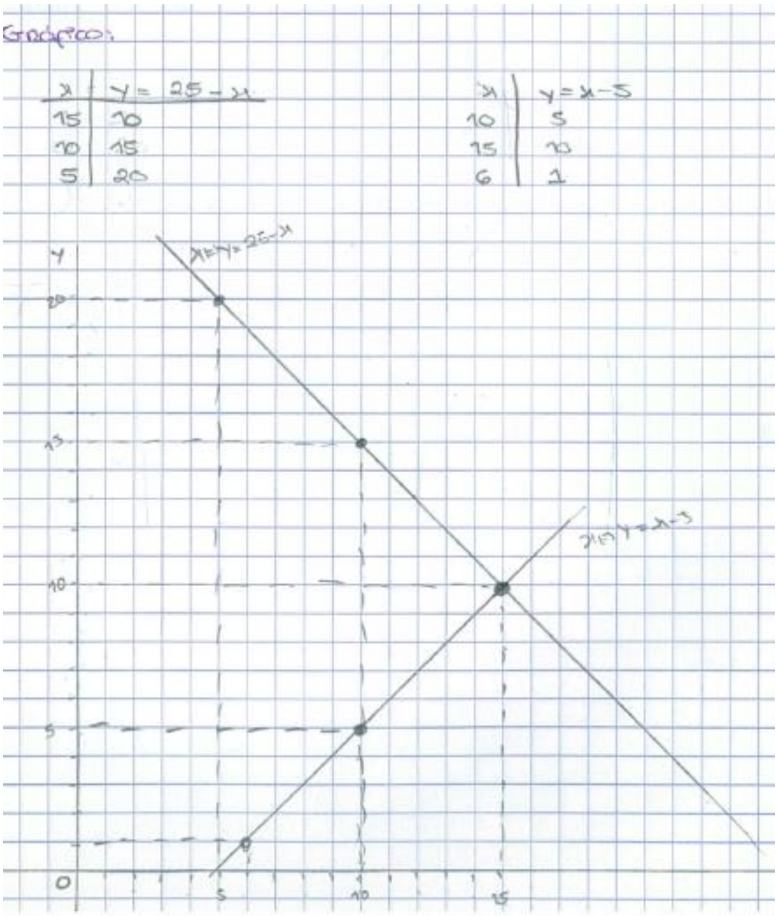


Figura 4. 38 - Exemplo de resolução de um Sistema de Equações, pelo método gráfico.

Professora: Pode representar no quadro se faz favor?
Aluna: Sim professora. Faço à mão ou na máquina?
Professora: Este representa com giz no quadro pois também o representou com lápis no seu caderno, os próximos podem ser representados com recurso à calculadora gráfica.

[Um aluno coloca o dedo no ar]

Aluno: Ó Professora, então naquele problema dos tarifários, também havia Sistemas de Equações? As retas também se cruzavam como estas!
Professora: Muito bem observado. A seguir vamos voltar a esse problema para escreverem Sistemas de Equações, verificar soluções, etc. Agora retomem o Sistema que tínhamos considerado.
Professora: Relembrem-me qual era a solução do Sistema de Equações que resolveram pelo método analítico, ou seja pelo método de substituição.
Aluno: Era o par (15; 10).
Professora: E o que representa esse ponto aqui? (aponta para o referencial)
Aluno: É onde as retas se cruzam.
Professora: Pois é! O ponto de interseção das duas retas é de facto a solução do Sistema de Equações.

Professora: Visto não termos agora tempo, como trabalho para casa, vão considerar novamente o problema referente aos tarifários para escreverem os Sistemas de Equações que conseguirem e indicarem as respetivas soluções.

Balanço da aula:

A resolução do mesmo Sistema de Equações pelo método de substituição e pelo método gráfico permitiu aos alunos transitarem entre as várias representações e compreenderem o significado do conjunto solução.

- Terceira aula (28/03/14)

  Duração: 45 minutos

  Sumário: Continuação do sumário da aula anterior- representação gráfica de sistemas.

A professora começou por questionar os alunos sobre os Sistemas de Equações que conseguiram escrever a partir do problema dos tarifários.

A maioria dos alunos respondeu três.

A professora pede a um aluno para representar as três Funções na calculadora gráfica instalada no computador da sala de aula e com projeção no quadro interativo.

O aluno apresentou o seguinte:

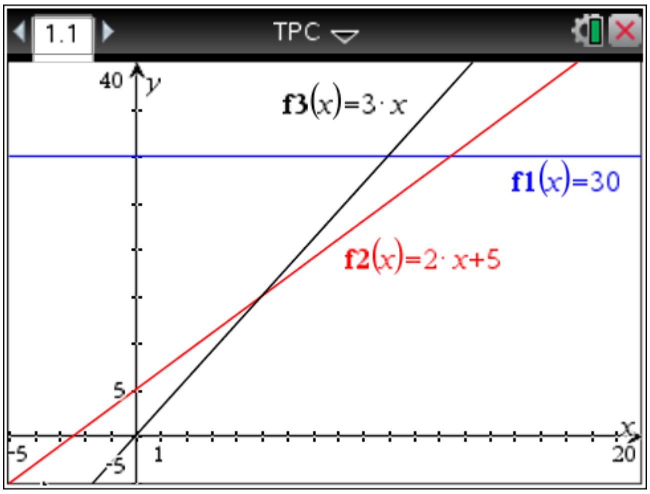


Figura 4. 39 – Representação gráfica de um problema (TPC)

Os alunos foram identificando os Sistemas de Equações seguintes: $\begin{cases} y = 3x \\ y = 30 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 2x+5 \\ y = 30 \end{cases}$ e $\begin{cases} y = 2x+5 \\ y = 3x \end{cases}$; com as soluções (10;30), (12,5;30) e (5,15) respetivamente.

Balanço da aula:

Esta aula serviu essencialmente para os alunos identificarem Sistemas de Equações e trabalharem o conceito de solução de um Sistema de Equações a partir da interseção de duas retas. Desta forma, os alunos puderam passar da resolução gráfica para a analítica, uma vez que já tinham feito o inverso.

- Quarta aula (01/04/14)

  Duração: 45 minutos

  Sumário: Entrega e correção da Ficha de Avaliação.

A professora procedeu à entrega da Ficha de Avaliação de conhecimentos.

Os alunos tiveram algum tempo para analisarem as suas respostas e posteriormente foi realizada a correção no grande grupo.

Balanço da aula:

Nesta aula, a investigadora, aproveitou para fazer uma análise das questões que os alunos tinham acertado ou errado com maior frequência.

Uma vez que não se pode relacionar o sucesso das questões com a utilização da calculadora gráfica, esta avaliação serve apenas como mero indicador dos resultados dos alunos.

- Quinta aula (02/04/14)

  Duração: 90 minutos

  Sumário: Classificação de Sistemas de Equações recorrendo à calculadora gráfica.

A professora projetou, no quadro interativo, um *PowerPoint,* onde constavam os três Sistemas de Equações:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ -x + y = -5 \end{cases} ; \begin{cases} x + y = 2 \\ -2x + y = 2 \end{cases} ; \begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$$

De seguida, dá indicação aos alunos, para resolverem analítica e graficamente cada um dos Sistemas de Equações.

Na resolução do primeiro Sistema, um aluno apresenta:

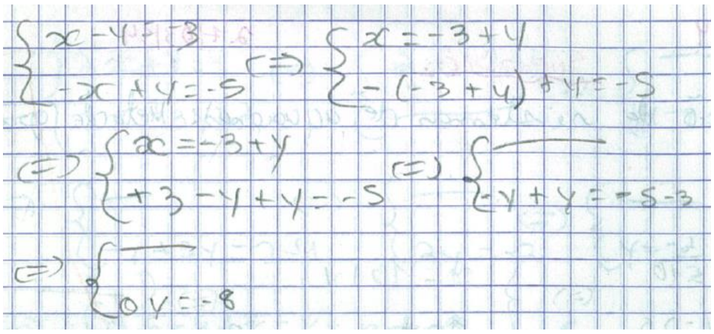


Figura 4. 40 - Resolução de um Sistema de Equações para proceder à sua classificação (sistema impossível)

Professora: Lembram-se como se classificava uma equação deste tipo?

Aluno: Impossível.

Professora: Pois era, então também o Sistema de Equações terá esse nome - Sistema impossível, visto ser impossível determinar a sua solução. Agora representem graficamente e observem o que obtiveram.

Os alunos apresentaram o gráfico, recorrendo à calculadora gráfica.

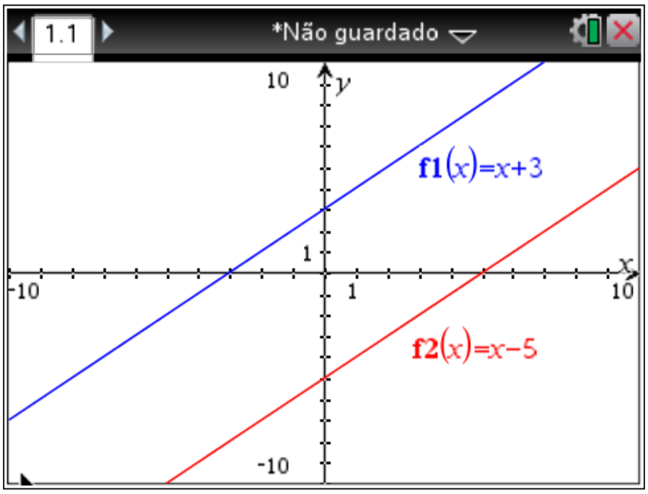


Figura 4. 41 – Representação gráfica de um Sistema impossível

Relativamente à resolução do segundo Sistema de Equações proposto, uma aluna apresentou o seguinte:

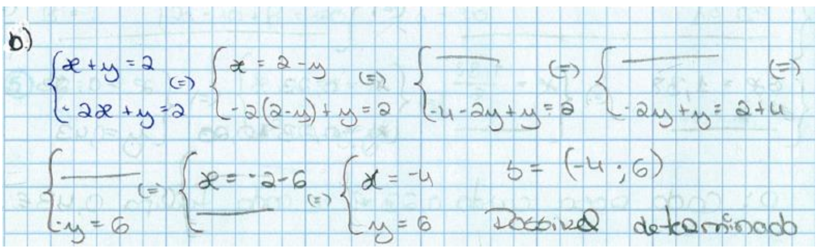


Figura 4. 42 - Resolução de um Sistema de Equações para proceder à sua classificação (sistema possível determinado)

Neste Sistema de Equações, os alunos não demonstraram dificuldade na sua classificação, prosseguindo para a representação gráfica:

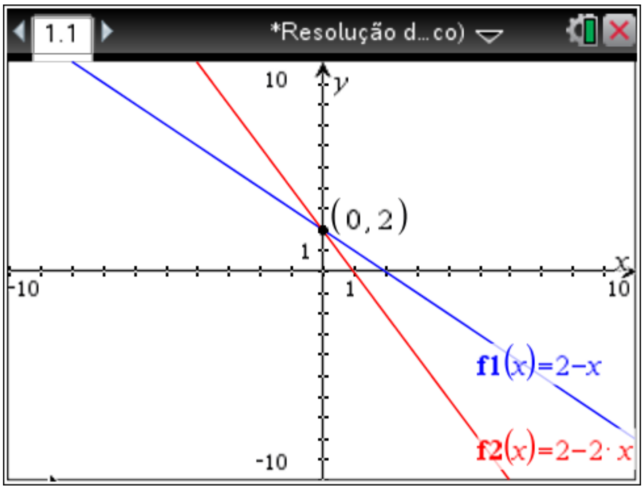


Figura 4. 43 - Representação gráfica de um Sistema possível determinado

Passando para o terceiro Sistema de Equações, a resolução apresentada pelo aluno que havia respondido ao primeiro, foi a seguinte:

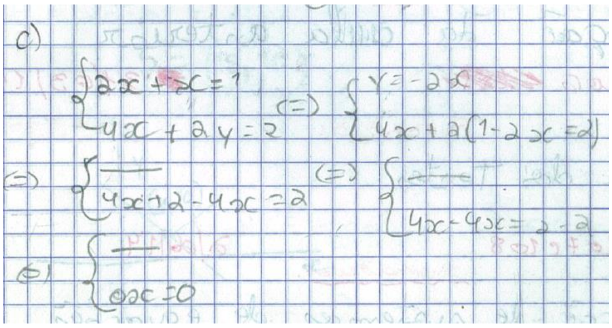


Figura 4. 44 - Resolução de um Sistema de Equações para proceder à sua classificação (sistema possível indeterminado)

Professora: Então, o que acontece agora? Que valor(es) pode tomar a incógnita *x*?

Aluno: Um valor qualquer. Vai dar sempre zero.

Professora: Assim sendo, podemos determinar a solução do sistema?

Aluno: Não. São infinitas.

Professora: Nestes casos, o Sistema de Equações designa-se possível indeterminado. Representem também graficamente.

Uma das representações obtidas foi:

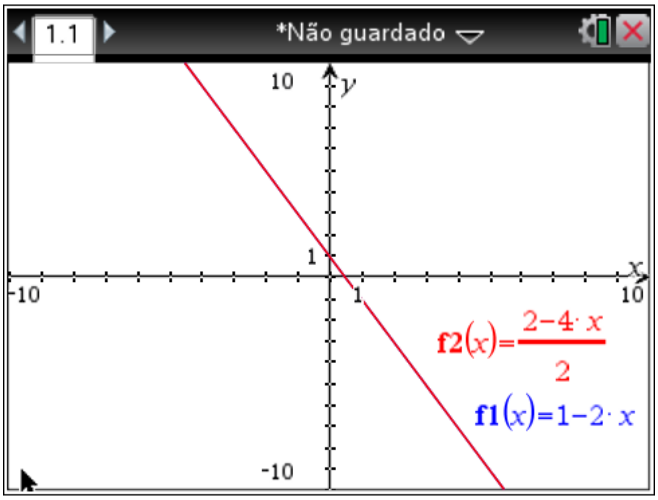


Figura 4. 45 - Representação gráfica de um sistema possível indeterminado

Uma vez classificados os três tipos de Sistemas de Equações, uma aluna esquematiza essa informação da seguinte forma:

Figura 4. 46 - Esquema para a classificação dos Sistemas de Equações

Balanço da aula:

A resolução dos três Sistemas de Equações propostos permitiu a sua classificação e associação entre esta e a respetiva representação gráfica.

- Sexta aula (03/04/14)

  Duração: 90 minutos

  Sumário: Resolução de problemas usando Sistemas de Equações.

No decorrer desta aula, a investigadora acompanhou os três grupos de alunos escolhidos para o estudo de caso deslocando-se para outra sala de aula.

A aula será descrita mais à frente, a quando da análise dos dados - desempenho dos alunos nas tarefas propostas.

➢ Sétima aula (22/04/14)

Duração: 45 minutos

Sumário: Resolução de tarefas utilizando a calculadora gráfica.

Nesta aula, os alunos equacionaram alguns problemas. O primeiro, proposto pela professora, foi resolvido da seguinte forma por uma aluna:

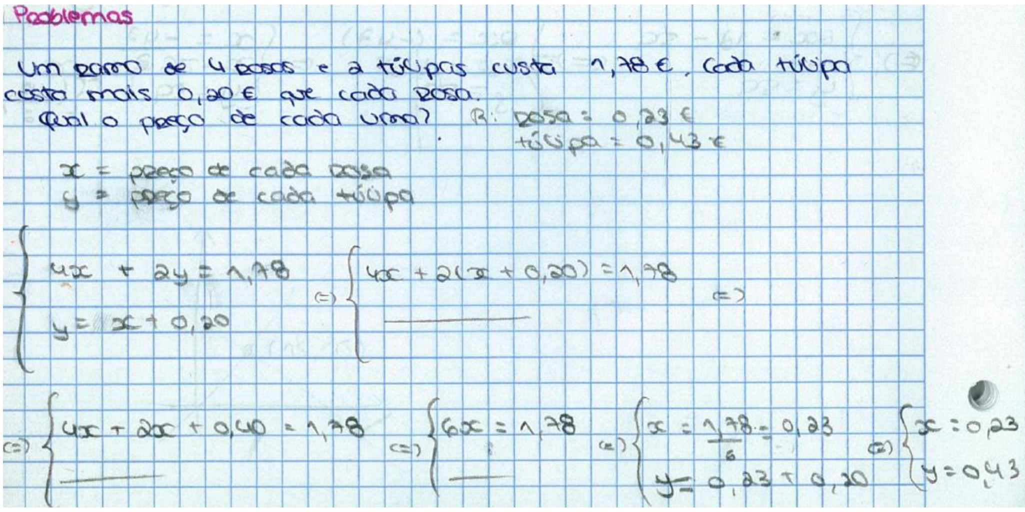


Figura 4. 47 - Exemplo da resolução de um problema recorrendo ao método analítico

Para a resolução dos problemas propostos na Ficha de Trabalho “Problemas e Sistemas de Equações” – (Anexo XI), a professora informou os alunos que após equacionassem os problemas, podiam resolvê-los por um processo à escolha.

No caso do exercício 1, foi resolvido conforme os passos apresentados a seguir:

Primeiro foram identificadas as incógnitas: x =número de automóveis; y = número de motas.

Em segundo lugar foi equacionado o problema:

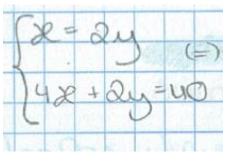


Figura 4. 48 – Sistema de Equações utilizado para resolver o exercício 1

Seguiu-se a representação gráfica do Sistema de Equações e determinação da solução:

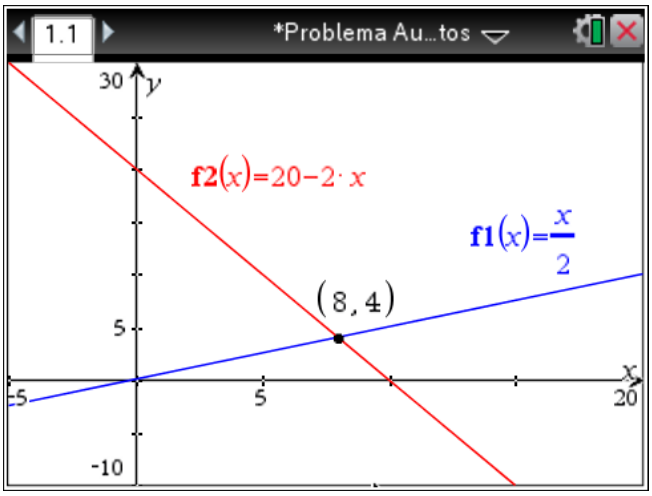


Figura 4. 49- Representação gráfica do Sistema de Equações representativo do exercício 1

Por último foi obtida a resposta: Há 8 automóveis e 4 motas.

Balanço da aula:

A resolução de problemas utilizando Sistemas de duas Equações a duas incógnitas revelou-se de extrema importância para os alunos.

Por um lado contemplava a interpretação de enunciados, e, por outro lado a resolução de Sistemas de Equações permitindo aos alunos passar da resolução analítica para a gráfica onde a calculadora gráfica era utilizada. Por fim, a interpretação do conjunto solução no contexto do problema proposto.

- Oitava aula (23/04/14)

  Duração: 90 minutos

  Sumário: Correção da Ficha de Trabalho sobre problemas usando Sistemas de Equações.

No decorrer desta aula, a investigadora acompanhou os três grupos de alunos escolhidos para o estudo de caso deslocando-se para outra sala de aula.

Esta aula, será descrita mais à frente, nas tarefas propostas aos alunos.

4.2.3. Tarefas propostas aos alunos

Os três conjuntos de tarefas realizados por cada um dos pares de alunos participantes no estudo de caso constituíram a principal técnica de recolha de dados.

As tarefas propostas (Anexos VIII, XII e XIII) envolvem algumas questões com as quais os alunos estão mais familiarizados e outras que não lhes são tão familiares, como são o caso da questão f) das Tarefas Matemáticas (1), questão 5 das Tarefas Matemáticas (2) e a questão 4 das Tarefas Matemáticas (3).

O primeiro conjunto de tarefas decorreu durante uma aula onde se encontrava o grupo turma, para se poder ter a perceção de ser ou não um ambiente propício para o efeito. O seu guião, composto por seis questões, recai totalmente sobre o tema das Funções (Anexo VIII). As questões colocadas nas diversas situações têm por base conceitos já aprendidos em anos transatos, mas que, neste ano letivo foram estudados com maior ênfase, como é o caso da Função afim. Tinham como principais objetivos: desenvolver o raciocínio, a interpretação e a comunicação; verificar se durante o espaço de tempo que estiveram a trabalhar com Funções os alunos se foram apropriando da calculadora gráfica; e de que modo a usaram na resolução das diferentes questões.

No segundo conjunto de tarefas, o guião é constituído por cinco questões (Anexo XII). A primeira incide novamente sobre o tema Funções, as duas seguintes dizem respeito aos Sistemas de Equações do 1.º grau a duas incógnitas, e a quarta é uma situação proposta para que os alunos possam explorar as Funções e terem contacto com a regressão linear. Os principais objetivos eram: averiguar se os alunos apreenderam os conceitos; verificar se passam de uma representação para outra tanto nas Funções como nos Sistemas de Equações; e analisar de que modo a calculadora gráfica é agora utilizada, uma vez que já decorreu mais tempo para a adaptação dos alunos a este artefacto.

No terceiro conjunto de tarefas (Anexo XIII), o guião é constituído por quatro questões, sendo as três primeiras referentes aos Sistemas de Equações do 1.º grau a duas incógnitas e a quarta, uma situação que permita aos alunos explorar a modelação matemática. Neste conjunto de tarefas, tal como nos anteriores, havia conteúdos que já haviam sido analisados, no entanto, pretendia-se verificar se os alunos ainda evidenciavam dificuldades. O principal objetivo era verificar se alunos do 8.º ano de escolaridade conseguem servir-se da modelação matemática para a resolução de problemas.

Enquanto o primeiro conjunto de tarefas foi realizado na presença de todos os elementos da turma, no segundo e terceiro conjuntos, os grupos de alunos participantes no estudo de caso, ficaram numa sala diferente dos restantes elementos da turma, para que permanecessem num ambiente mais calmo que permitisse maior concentração na realização das tarefas propostas.

A investigadora foi colocando questões que levaram os alunos a explicarem os seus raciocínios, permitindo assim verificar se compreenderam determinados objetos matemáticos, nomeadamente as Funções e Sistemas de Equações. Possibilitou também verificar em que situações os alunos utilizavam a calculadora gráfica e o modo como o faziam.

O espaço de tempo que se verificou entre a realização dos dois primeiros conjuntos de tarefas deveu-se ao facto de se considerar importante uma melhor apropriação da calculadora gráfica, por parte dos alunos.

Pôde constatar-se que a realização das tarefas não causou grande ansiedade nos alunos.

4.2.4. Guiões das Tarefas propostas aos alunos

Tendo presentes os objetivos deste estudo, foram propostos aos alunos três conjuntos de tarefas, designados por Tarefas Matemáticas (1), (2) e (3) respetivamente.

Para a aplicação destas tarefas foram selecionadas três aulas de noventa minutos, sendo dedicada uma aula a cada um desses conjuntos de tarefas.

Uma vez que com a resolução destes conjuntos de tarefas se pretendia responder às questões colocadas a quando da definição dos objetivos, a sua elaboração contou com a parceria entre a professora e investigadora.

Apresenta-se a seguir uma descrição de cada um dos conjuntos de tarefas no que respeita à sua natureza, data de aplicação e objetivos.

4.2.4.1. Guião das Tarefas Matemáticas (1)

A tarefa proposta neste Guião (Anexo VIII) traduz um problema real, tarefa de natureza fechada e desafio elevado, à qual se seguem seis questões contextualizadas. Foi adaptada de uma tarefa do manual adotado, Xis 8.º Ano (Pereira & Pimenta, 2011, p. 102) e aplicada no dia doze de fevereiro de 2014.

1. O Francisco quer instalar internet em sua casa e, por isso, consultou o preço de três empresas:

- **Empresa A:** cobra uma mensalidade fixa de 30 euros.
- **Empresa B:** cobra uma tarifa mensal de 5 euros com um acréscimo de 2 euros por cada hora de utilização.
- **Empresa C:** cobra 3 euros por cada hora de utilização.

O Francisco fez uma estimativa do tempo que utilizaria a internet por mês e verificou que seriam cerca de 20 horas.

a) **Completa** a tabela, considerando o tarifário de cada uma das empresas.

		TEMPO (horas)				
		0	5	10	15	20
EMPRESA	A					
	B					
	C					

b) Qual o preço a pagar pelo Francisco, se pretender utilizar a internet durante 10 horas e meia, optando pela empresa A? E se optar pela empresa B? E pela empresa C?

c) Sabendo que o Francisco só tem 12 euros disponíveis para a utilização de internet, qual das empresas aconselharias?

d) **Escreve** uma expressão algébrica que represente cada uma das funções.

e) **Constrói**, no mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos representativos das mensalidades a pagar para cada uma das empresas.

f) Numa pequena composição, **explica** qual a empresa que disponibiliza as melhores condições.

Figura 4. 50 – Tarefa 1 do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Tinha como principais objetivos:

- interpretar informação e conceitos fornecidos de diversas formas;
- representar gráfica e analiticamente as Funções constante, linear e afim;
- desenvolver o raciocínio e a comunicação matemática.

Apesar de ter sido planificada na sua globalidade para 90 minutos, incluindo a apresentação, realização e discussão, esta última etapa não foi possível, pelo que foi agendada, em grande grupo, para a aula seguinte.

4.2.4.2. Guião das Tarefas Matemáticas (2)

O segundo conjunto de tarefas (Anexo XII), constituído por quatro situações, que segundo Ponte (2005), variam entre exercícios, problemas, e tarefas de exploração, foi aplicado no dia três de abril de 2014.

A primeira situação, Tarefa 1, consiste num problema, retirado do Teste Intermédio de Matemática do 9º ano, Maio 2010 (IAVE, p. 5) , seguido de três alíneas.

Tarefa 1

Para medir a temperatura, podem utilizar-se termómetros graduados em graus Celcius ou termómetros graduados em graus Fahrenheit.

Para relacionar graus Celsius com graus Fahrenheit, utiliza-se a fórmula $F = 1{,}8C + 32$,

em que C representa o valor da temperatura em graus Celsius e F representa o correspondente valor em graus Fahrenheit.

a) Determina o valor da temperatura, em graus Fahrenheit correspondente a -25 graus Celsius.

b) Determina o valor da temperatura, em graus Celsius, correspondente a 95 graus Fahrenheit.

Mostra como chegaste à tua resposta.

c) Nem o gráfico A, nem o gráfico B traduzem a relação $F = 1{,}8C + 32$

Apresenta uma razão para rejeitar o gráfico A e uma razão para rejeitar o gráfico B.

Gráfico A

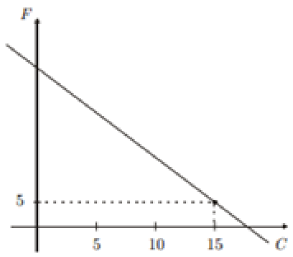
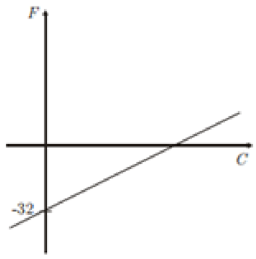


Gráfico B



Teste intermédio de matemática do 9º ano, Maio 2010

Figura 4. 51 – Tarefa 1 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Tinha como principais objetivos:

- interpretar informação e conceitos fornecidos de diversas formas: expressões algébricas, gráficos e textos matemáticos;
- Analisar o efeito dos parâmetros *k* e *b* na representação gráfica de Funções do tipo $y = kx + b$.

A Tarefa 2 consiste também num problema, tarefa de natureza fechada e desafio elevado, tendo sido adaptada do Teste Intermédio de Matemática do 9º ano, Maio 2011 (IAVE, p. 5), seguindo-se duas alíneas.

Tarefa 2

Uma escola tem apenas turmas do 5.º ano e turmas do 6.º ano de escolaridade.

Sabe-se que:

- todas as turmas do 5.º ano têm o mesmo número de alunos;
- todas as turmas do 6.º ano têm o mesmo número de alunos.

Seja *x* o número de alunos de cada turma do 5.º ano e seja y o número de alunos de cada turma do 6.º ano.

a) Admite que a escola tem quatro turmas do 5.º ano e cinco turmas do 6.º ano.

O que representa a expressão $4x+5y$, no contexto da situação descrita?

b) Sabe-se que:

- uma visita de estudo que inclua todos os alunos de uma turma do 5.º ano e todos os alunos de duas turmas do 6.º ano terá a participação de 67 alunos;
- uma visita de estudo que inclua todos os alunos de duas turmas do 5.º ano e todos os alunos de uma turma do 6.º ano terá a participação de 71 alunos.

Escreve um sistema que permita determinar o número de alunos de cada turma do 5.º ano (valor de x) e o número de alunos de cada turma do 6.º ano (valor de y).

Não resolvas o sistema.

Teste intermédio de matemática do 9º ano, Maio 2011

Figura 4. 52 - Tarefa 2 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

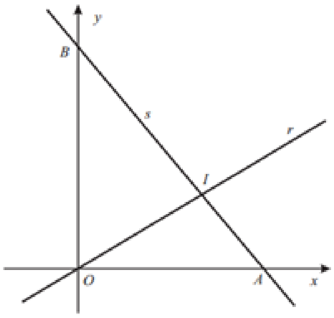
Tinha como principais objetivos:

- interpretar informação fornecida através de textos matemáticos;
- exprimir as ideias matemáticas usando notação, simbologia e vocabulário próprios.

No que respeita à tarefa 3, trata-se de um exercício, tarefa de natureza fechada e de desafio reduzido, adaptado do Teste Intermédio de Matemática do 9º ano, 2012 (IAVE, p. 6), seguida de quatro alíneas.

Tarefa 3

Na figura estão representadas, num referencial cartesiano, as retas ***r*** e ***s***.



Sabe-se que:

- A reta r é definida por $y = 0{,}6x$
- A reta s é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$
- O ponto A é o ponto de interseção da reta s com o eixo das abcissas
- O ponto B é o ponto de interseção da reta s com o eixo das ordenadas
- O ponto I é o ponto de interseção das retas r e s

a) Qual é a ordenada do ponto B?

b) Qual é a medida do segmento de reta [AO]?

(A) 3,5

(B) 3,75

(C) 4,5

(D) 4,75

c) Determina, analiticamente, as coordenadas do ponto I.

d) Determina a área do triângulo [AIO].

Adaptado do Teste intermédio de matemática do 9º ano, 2012

Figura 4. 53 - Tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Os principais objetivos, eram:

- interpretar informação fornecida através de gráficos;
- identificar várias representações de uma Função;
- relacionar as Funções linear e afim;
- exprimir as ideias matemáticas usando notação, simbologia e vocabulário próprios;
- resolver Sistemas de Equações;
- utilizar a calculadora gráfica para confirmar os resultados obtidos.

A tarefa 4, retirada do manual de Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11º ano- Texto Editora (Longo & Branco, 2011), é de natureza aberta, e, embora não sendo de longa duração, pode ser considerada uma tarefa de investigação devido ao elevado desafio que apresenta, para alunos do 8.º ano de escolaridade:

Tarefa 4

Na tabela seguinte registou-se a contagem mensal do número de animais de uma certa espécie, existentes numa área reservada desde a sua criação:

Número de meses decorridos desde a criação da área reservada (x)	Número de animais existentes na área reservada (y)
0	10
1	12
2	13
3	16
4	18
5	24
6	25
7	30
8	36
9	42
10	45
11	50
12	54

a) De acordo com a tabela, durante quanto tempo foi feita a recolha de dados?

b) Represente os dados da tabela através de uma nuvem de pontos.

c) Com o auxílio da calculadora gráfica, determine o modelo de regressão linear, de equação $y = ax + b$, que se ajuste à nuvem de pontos da alínea anterior. Indique os valores de ***a*** e ***b*** com aproximação às centésimas.

d) Segundo o modelo determinado, qual é a previsão para o número de animais existentes na reserva ao fim de 2 anos?

Retirado do manual de Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11º ano- Texto Editora

Figura 4. 54 - Tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Os principais objetivos, eram:

- interpretar informação fornecida de diferentes formas, tabela do enunciado ou calculadora gráfica;
- exprimir as ideias matemáticas usando notação, simbologia e vocabulário próprios;
- formular conjeturas.

4.2.4.3. Guião das tarefas Matemáticas (3)

O terceiro conjunto de tarefas (Anexo XIII), constituído por quatro tarefas, classificadas segundo Ponte (2005) como tarefas de exploração/investigação de natureza aberta e desafio reduzido/elevado. Foi aplicado no dia 23 de abril de 2014.

As três primeiras tarefas foram adaptadas da Proposta de conjunto de tarefas para o 3.º ciclo (2010), (Professores, 2010, pp. 33-38). A última tarefa é da autoria da professora e investigadora.

Tarefa 1

Por simples observação, é possível ver qual é a solução do sistema: $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a - b = 0 \end{cases}$

Explica o teu raciocínio.

Adaptado de Funções e Equações - 8º ano - Proposta de conjunto de tarefas para o 3º ciclo (2010) - DGIDC

Figura 4. 55 – Tarefa 1 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Tarefas 2

Num referencial, traça a reta **y=2x+1**.

a) Traça outra reta de modo que o sistema constituído pelas equações dessas retas seja um sistema impossível.

b) Que alterações deverás fazer à segunda reta traçada para encontrar um novo sistema possível e indeterminado?

c) Procede de modo análogo, de forma a obteres um sistema possível e determinado e explica como pensaste.

Adaptado de Funções e Equações - 8º ano - Proposta de conjunto de tarefas para o 3º ciclo (2010) - DGIDC

Figura 4. 56 - Tarefa 2 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Tarefa 3

Sendo x e y o comprimento e a largura de um retângulo, respetivamente, elabora o enunciado do problema correspondente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ y = \frac{3}{5}x \end{cases}$$

Adaptado de Funções e Equações - 8º ano - Proposta de conjunto de tarefas para o 3º ciclo (2010) - DGIDC

Figura 4. 57 - Tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Tarefa 4

a) Considera dois pontos de uma determinada reta (reta r).

b) Considera a reta que passa por esses dois pontos e escreve a expressão analítica que define essa reta.

c) Considera dois pontos para outra determinada reta (reta s).

d) Considera a reta que passa por esses dois pontos e escreve a expressão analítica dessa reta.

e) Escreve o sistema de duas equações a duas incógnitas que essas duas retas sugerem.

f) Qual a solução do sistema formado pelas reta que encontraste nas alineas anteriores.

Figura 4. 58 - Tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Os principais objetivos deste conjunto de tarefas eram:

- interpretar informação fornecida de diferentes formas;
- reconhecer Sistemas possíveis (determinados e indeterminados) e impossíveis;
- interpretar graficamente as soluções de um Sistema de Equações
- consolidar a noção de solução de um Sistema de Equações;
- discutir resultados e processos utilizados;
- formular conjeturas;
- verificar o modo de utilização da calculadora gráfica.

5. ANÁLISE DOS DADOS

Uma vez caracterizadas as tarefas propostas, neste capítulo proceder-se-á à análise dos dados.

Atendendo às recomendações de Bogdan & Bilken (1994), a análise dos dados começou a ser realizada durante o processo de recolha dos mesmos para melhor orientar a investigação.

Desenvolveu-se em duas fases:

numa primeira fase, foi descrito o desempenho dos três pares de alunos selecionados para o estudo de caso durante a realização das tarefas propostas e,

numa segunda fase, será feita uma reflexão sobre o trabalho desenvolvido, nomeadamente no que respeita (1) ao uso da calculadora gráfica na execução de determinada tarefa, (2) integração do uso de diferentes representações e (3) efeito da utilização do artefacto na qualidade das aprendizagens.

5.1. Desempenho dos alunos nas tarefas propostas

Cada um dos conjuntos de tarefas tinha objetivos diferentes e foi aplicado em momentos diferentes, pelas razões já anteriormente enunciadas.

A análise dos dados será realizada por grupo de alunos ao longo da realização dos referidos conjuntos de tarefas.

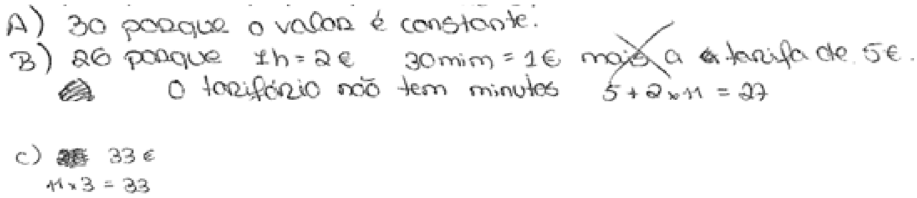
5.1.1. O grupo (F e M)

5.1.1.1. Nas Tarefas Matemáticas (1)

Nesta tarefa pretendia-se a interpretação de um problema real e a resposta às seis questões colocadas.

As alunas começaram por ler o problema e, sem demonstrarem dificuldade, completaram a tabela da alínea a), efetuando os cálculos mentalmente.

Relativamente à alínea b), (preço a pagar pelo Francisco se utilizar a internet durante dez horas e meia, optando por cada uma das empresas), as alunas responderam rapidamente para as empresas A e C mas hesitaram um pouco para a resposta à empresa B, como se pode observar na resolução apresentada:


A) 30 porque o valor é constante.
B) 26 porque 1h = 2€ 30min = 1€ ~~mais~~ a tarifa de 5€.
O tarifário não tem minutos 5 + 2×11 = 27

c) 33€
11×3 = 33

Figura 5. 1- Resposta do grupo (F e M) à questão b) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

[Observando esta resolução, a investigadora questiona as alunas]

> Investigadora: Podem explicar cada uma das respostas para as diferentes empresas?
> Aluna M: Sim professora. Na empresa A paga sempre 30, é uma Função constante, por isso é 30€.
> Aluna F: Na empresa B…[a aluna F hesitou um pouco na resposta]
> Tínhamos pensado que se uma hora custa 2€ então meia hora custa 1€ e a seguir acrescentávamos a taxa fixa de 5€.
> Aluna M: Mas não pode ser. Temos que pensar que falar dez horas e meia equivale a falar 11 horas, porque o tarifário não tem minutos.
> Então 5+2x11=27€.
> Aluna F: Pois é! E na empresa C, como paga 3€ por cada hora, fazemos 11x3=33€.

Na alínea c), era pedido para aconselharem o Francisco a optar por uma das três empresas sabendo que só tinha disponíveis 12€. Após pensarem um pouco na resposta, as alunas, escreveram:

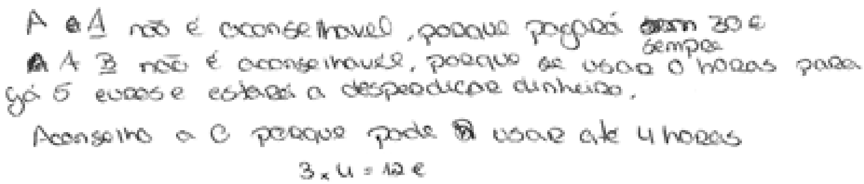


Figura 5. 2 - Resposta do grupo (F e M) à questão c) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

À alínea d) (escreve uma expressão algébrica que represente cada uma das Funções) responderam, sem dificuldade:

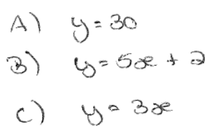


Figura 5. 3 - Resposta do grupo (F e M) à questão c) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Para dar resposta à alínea e) (construção, no mesmo referencial, dos gráficos representativos das mensalidades a pagar optando por cada uma das empresas), as alunas começaram por representar, separadamente, cada uma das Funções, no caderno diário.

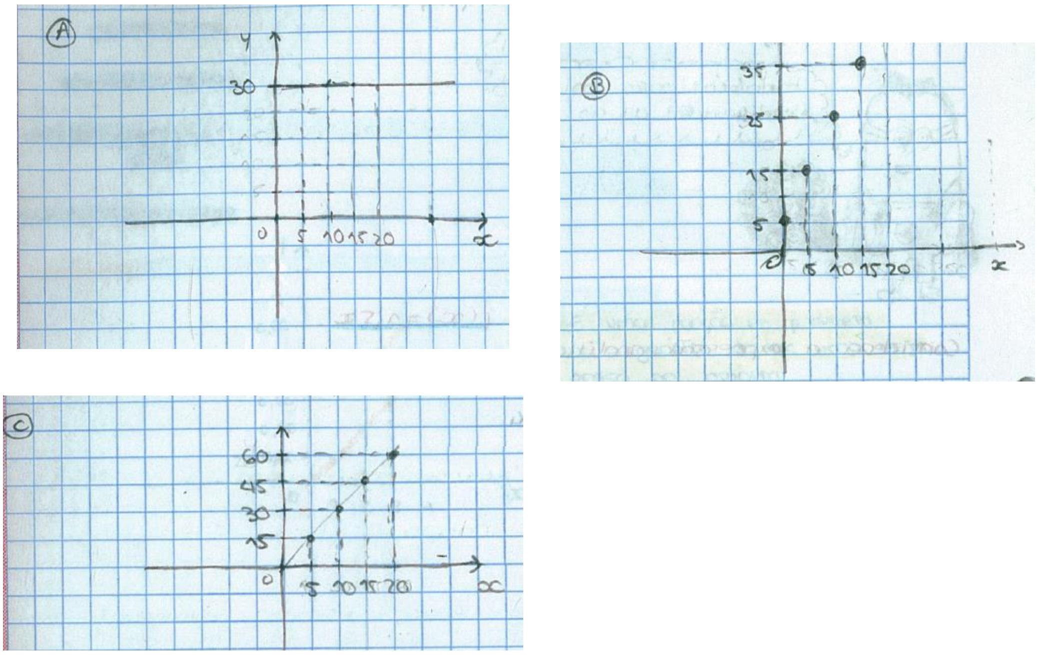


Figura 5. 4 – 1.ª Tentativa de resposta do grupo (F e M) à questão e) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

[Após verificar que tinham representado separadamente as três Funções, a investigadora questiona novamente as alunas]

> Investigadora: Qual o motivo que as levou a representar cada uma das Funções num referencial?
>
> [Enquanto liam novamente o enunciado, uma das alunas responde]
>
> Aluna F: Não tínhamos reparado que era pedido para serem representadas no mesmo referencial. Mas já se resolve…

[Não demoraram muito tempo a apresentar um novo referencial que comtemplasse a representação das três Funções]

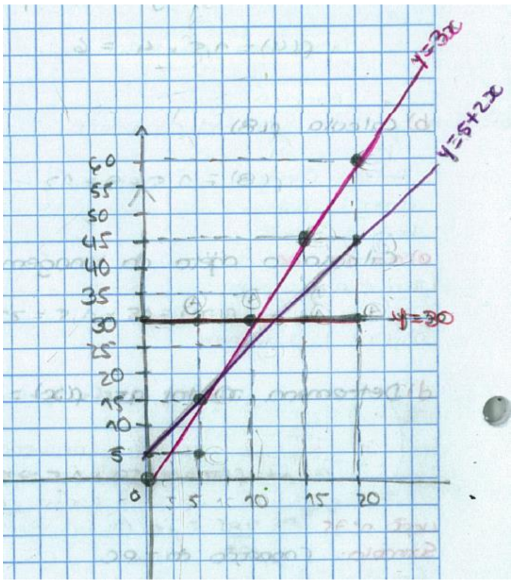


Figura 5. 5 - Resposta do grupo (F e M) à questão e) do Guião das Tarefas Matemáticas (1), sem recurso à calculadora gráfica

Note-se que ao representarem todas as Funções no mesmo referencial, as alunas identificaram cada uma com a respetiva expressão algébrica.

De seguida confirmaram todos os dados recorrendo à calculadora gráfica. Introduziram as três expressões, com a janela de visualização a seguir apresentada:

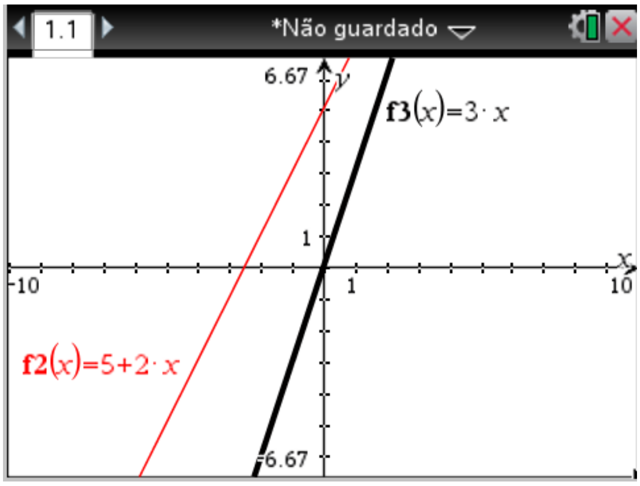


Figura 5. 6 – Resposta do grupo (F e M) à alínea e) do Guião das Tarefas Matemáticas (1), antes da atualização da janela de visualização

A aluna F comenta: Não se vê tudo o que pretendemos, podíamos ter alterado logo a janela pois numa das empresas é sempre 30. Claro que nem ia aparecer essa!

Aluna M: Alteramos agora tudo o que for necessário.

Surge então a representação gráfica numa nova janela de visualização:

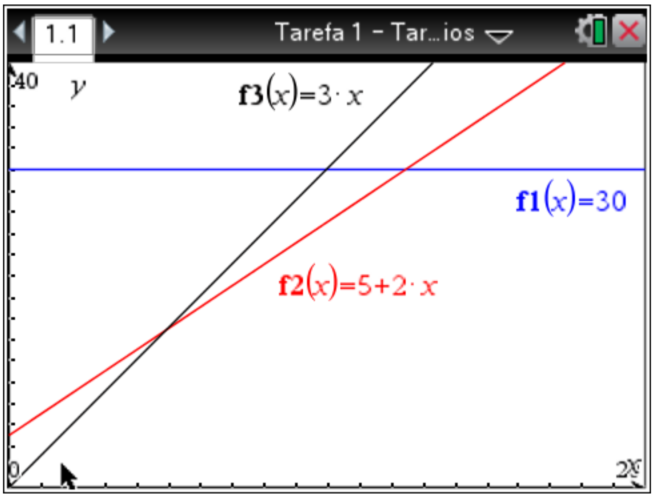


Figura 5. 7 - Resposta do grupo (F e M) à alínea e) do Guião das Tarefas Matemáticas (1), após atualização da janela de visualização

Aluna M: Veja professora, está igual à nossa. Agora podemos resolver a alínea f, a partir daqui.

Mas para a resolução da referida alínea (explicar, numa pequena composição, qual a empresa que disponibiliza as melhores condições), as alunas, optaram por recorrer em primeiro lugar ao uso do lápis e papel e só se seguida utilizaram a calculadora gráfica para confirmarem a análise que tinham feito.

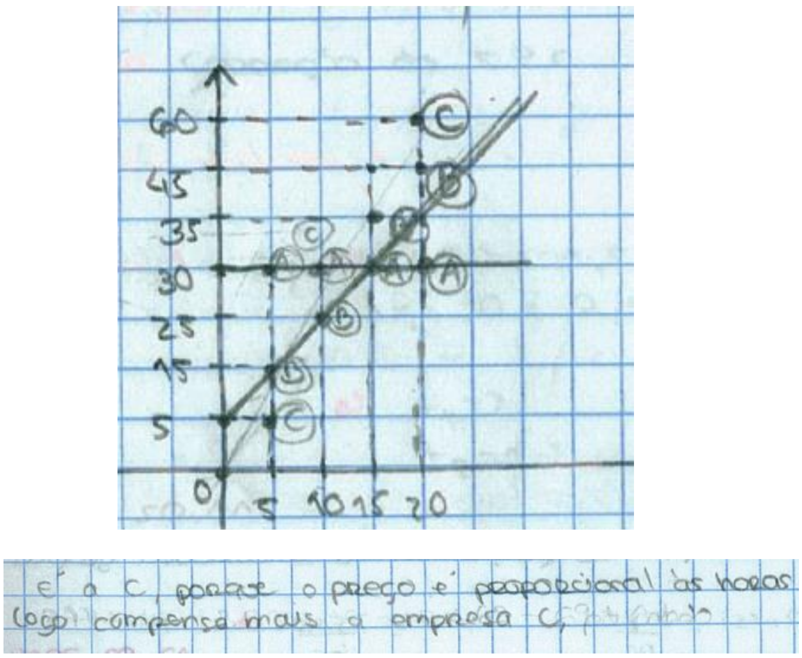


Figura 5. 8 - Resposta do grupo (F e M) à alínea f) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Nesta alínea, as alunas, manifestaram algumas dificuldades na explicitação dos seus raciocínios e revelaram falta de hábitos no que respeita à elaboração de composições matemáticas.

Na resolução das tarefas propostas neste primeiro conjunto, existiu alguma hesitação por parte das alunas, inerente à interpretação do enunciado na questão b). Na questão e), o facto de começarem pela representação gráfica de cada uma das Funções em referenciais distintos, parece estar relacionado com uma leitura menos atenta do enunciado, sendo posteriormente corrigida sem qualquer dificuldade, com recurso, em primeiro lugar ao lápis e papel e de seguida à calculadora gráfica, que neste caso serviu como ferramenta de verificação. Quanto à questão f), as alunas manifestaram dificuldade em expressar, por escrito, o seu raciocínio e evidenciaram pouco domínio na Comunicação Matemática.

Foram trabalhados os conceitos de Função constante, linear e afim, bem como as respetivas representações gráficas e expressões algébricas.

Relativamente ao modo como utilizaram a calculadora gráfica, as alunas encontravam-se ainda numa fase de conhecimento e apropriação (instrumentalização) pelo que este artefacto só era utilizado após a resolução analítica, essencialmente para confirmar resultados.

5.1.1.2. Nas Tarefas Matemáticas (2)

O segundo conjunto de tarefas era constituído por quatro tarefas.

Tarefa 1

Nesta tarefa era fornecida a expressão que relacionava graus Celsius com graus Fahrenheit da seguinte forma: $F = 1{,}8C + 32$.

Na alínea a) pretendia-se o valor da temperatura, em graus Fahrenheit, correspondente a (-25) graus Celsius. As alunas determinaram a imagem do objeto dado, sem dificuldade.

Na alínea b) era pedido o valor da temperatura, em graus Celsius, correspondente a 95 graus Fahrenheit. Aqui determinaram o objeto correspondente a uma determinada imagem também sem dificuldade.

Para responder à alínea c) (apresentar uma razão para rejeitar cada um dos gráficos), as alunas apresentaram o seguinte:

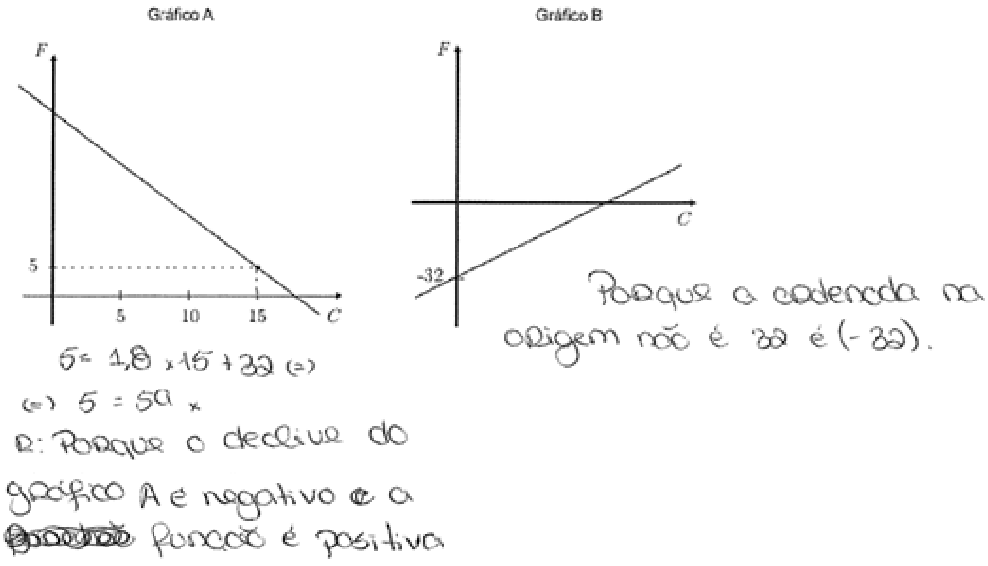


Figura 5. 9 - Resposta do grupo (F e M) à alínea c) da tarefa 1 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Com a realização destra tarefa foram trabalhados os conceitos de objeto, imagem, declive e ordenada na origem, os quais as alunas interiorizaram sem dificuldade. O uso de diferentes representações contribuiu para um desempenho positivo notando-se apenas alguma dificuldade em utilizar os conceitos adquiridos quando expressam os seus raciocínios.

Tarefa 2

Esta tarefa apresentava uma escola com apenas turmas do 5.º e do 6.ºanos, sendo posteriormente definidas as incógnitas x e y como sendo o número de alunos de cada turma do 5.º ano e o número de alunos de cada turma do 6.º ano respetivamente.

Na alínea a), admitindo que existiam quatro turmas do 5.º ano e cinco do 6.º ano, para comentar o que representa a expressão $4x+5y$, no contexto da situação descrita, as alunas, responderam corretamente: Representa o total de alunos do 5.º e 6.º anos.

Na alínea b), (equacionar o problema proposto através de um Sistema de duas Equações a duas incógnitas), as alunas escreveram corretamente o Sistema de Equações, e avançaram para a próxima tarefa.

Tarefa 3

Nesta tarefa era fornecido um referencial cartesiano onde se encontravam representadas as retas r e s definidas por $y=0{,}6x$ e $y=-1{,}2x+4{,}5$ respetivamente.

Para dar resposta às questões desta tarefa, as alunas começaram logo por utilizar a calculadora gráfica. Foi com recurso a este artefacto que resolveram todos os exercícios, explicando os processos utilizados:

Na alínea a), (determinar a ordenada do ponto B) responderam da seguinte forma:

a) Introduzimos a função da reta s e colocamos um ponto na ordenada na ori-
gem que é o B

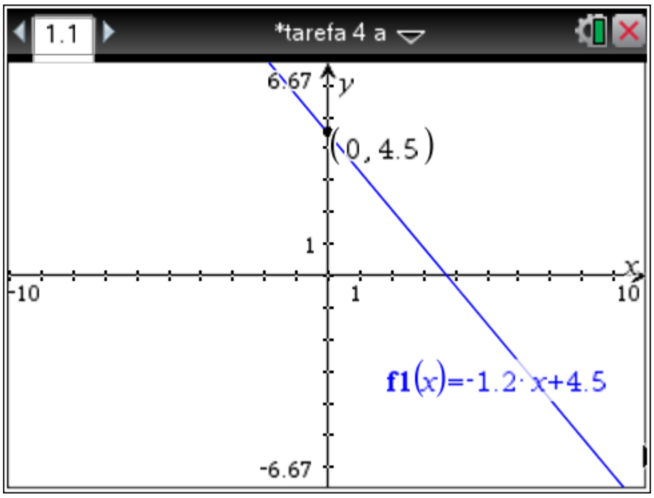


Figura 5. 10 - Resposta do grupo (F e M) à alínea a) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Na alínea b), questão de escolha múltipla, perguntava-se qual a medida do segmento de reta [AO]. As alunas respondem corretamente 3,75 explicando:

b) Introduzimos as funções das duas retas r e s e co-
locamos um ponto no A
e descobrimos o com-
primento.

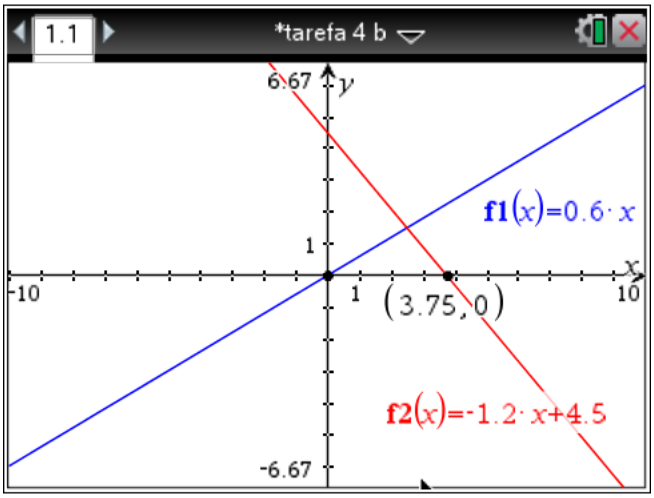


Figura 5. 11- Resposta do grupo (F e M) à alínea b) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Para responder à alínea c), (coordenadas do ponto de interseção das duas retas), as alunas respeitaram o pedido de resolução analítica, no entanto confirmaram os resultados obtidos recorrendo à calculadora gráfica.

$$\begin{cases} y = 0,6x \\ y = -1,2x + 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 0,6x = -1,2x + 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 0,6 + 1,2x = 4,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \_\_\_\_ \\ 1,8x = 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ x = \frac{4,5}{1,8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,6 \times 2,5 \\ x = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5 \\ x = 2,5 \end{cases}$$

Figura 5. 12 - Resposta do grupo (F e M) à alínea c) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

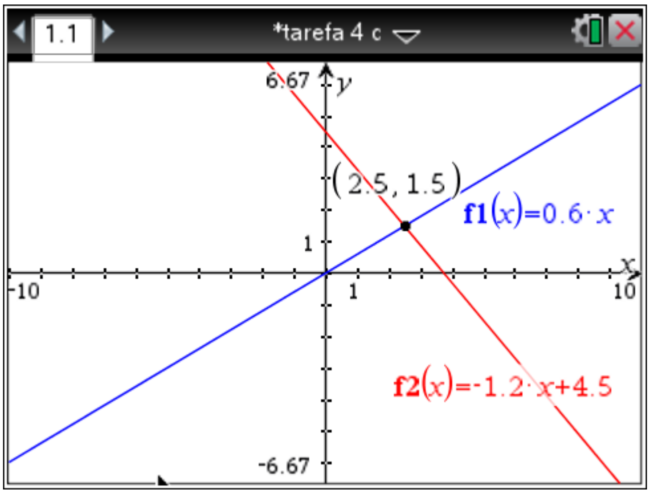


Figura 5. 13 – Confirmação do grupo (F e M) do resultado obtido na alínea c) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2), com recurso à calculadora gráfica

Na alínea d), pretendia-se determinar a área do triângulo [AIO].

As alunas, começaram por determinar a área do triângulo analiticamente. Para o comprimento da base utilizaram a medida do segmento [AO] e para a altura consideraram o valor da ordenada do ponto I. Neste caso, a calculadora gráfica só foi utilizada para efetuar os cálculos.

$$A_{[AIO]} = \frac{3,75 \times 1,5}{2} \simeq 2,81$$

Figura 5. 14 - Resposta do grupo (F e M) à alínea d) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

De seguida, explorando a calculadora gráfica, determinaram novamente a área do triângulo:

Introduzimos os duas funcões e marcamos um triangulo com os pontos [ABO] e depois calculamos a área através da medição que se encontrava na calculadora.

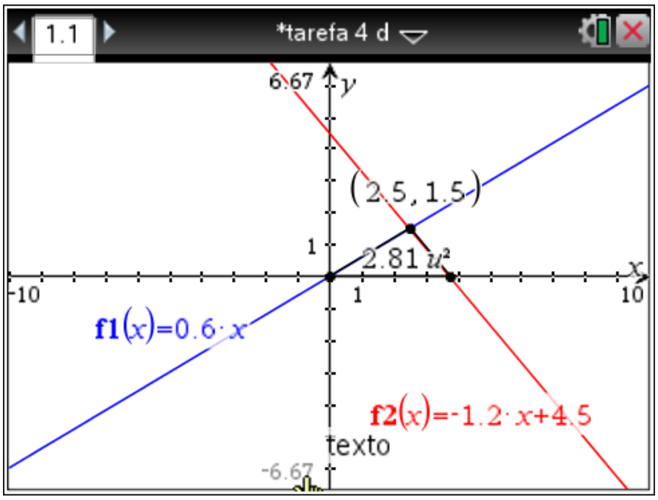


Figura 5. 15 - Resposta do grupo (F e M) à alínea d) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2), com recurso à calculadora gráfica

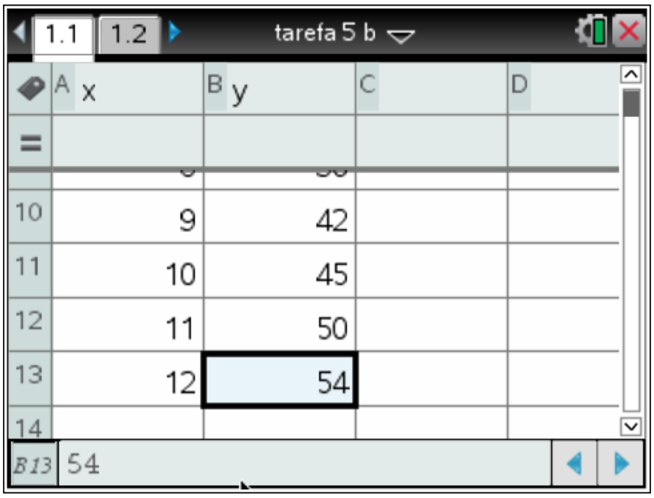
Tarefa 4

Nesta última tarefa era apresentado um problema com os dados fornecidos através de uma tabela.

As alunas responderam à alínea a), (durante quanto tempo foi feita a recolha de dados), por observação dos dados fornecidos na tabela.

Para responder às alíneas b) e c) onde era pedido para representarem os dados através de uma nuvem de pontos e determinar o modelo de regressão linear que se ajuste a essa nuvem de pontos, explicam as várias etapas:

abrimos a página de excell e passamos os valores da tabela pela página. Abrimos uma página de dados e estatística e identificamos as variaveis, como na horizontal x e na vertical y e obtivemos o grafico e fomos ao menu e depois ao analisar e no fim regressão linear (y = mx + b) e depois apareceu a função.



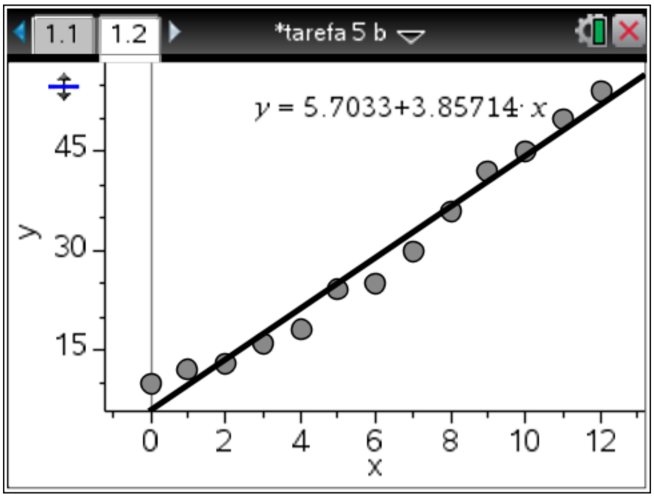


Figura 5. 16 - Resposta do grupo (F e M) às alíneas b) e c) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

À alínea d) (previsão do número de animais existentes ao fim de dois anos), as alunas responderam, com base na expressão obtida através da calculadora gráfica, efetuando os arredondamentos convenientes nos valores observados:

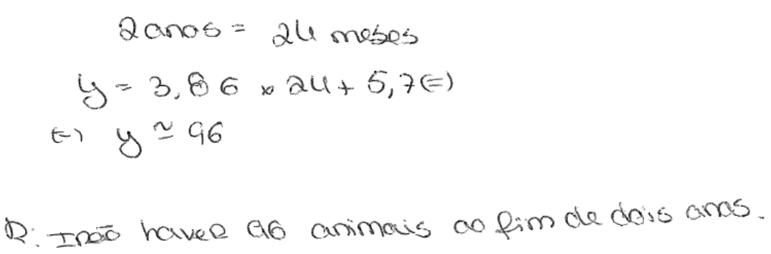


Figura 5. 17 - Resposta do grupo (F e M) à alínea d) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Na resolução do segundo conjunto de tarefas, as alunas não manifestaram dificuldades. Interpretaram informação e conceitos fornecidos de diferentes formas, analisaram o efeito dos parâmetros k e b na representação gráfica de Funções do tipo $y = kx + b$. Utilizaram várias representações e no que respeita à representação gráfica, a calculadora foi usada de diferentes modos: para efetuar cálculos – ferramenta computacional; para confirmar conjeturas - como ferramenta de verificação e para representar e interpretar os dados - como ferramenta de recolha e análise de dados.

Com exceção do pedido explicito de resolução analítica, as alunas selecionaram as tarefas nas quais consideraram benéfico o recurso à calculadora gráfica e de entre as diversas potencialidades, as que consideraram apropriadas para a resolução de cada situação. Pode dizer-se que as alunas já se encontram numa fase de instrumentação no que respeita ao uso da calculadora gráfica e fazem-no de forma proficiente. Além disso, determinaram um modelo de regressão linear o que não seria possível sem o recurso a este artefacto.

5.1.1.3. Nas Tarefas Matemáticas (3)

O terceiro conjunto de tarefas era constituído por quatro tarefas.

Tarefa 1

Nesta tarefa, por observação do Sistema de duas Equações a duas incógnitas que era dado, as alunas responderam: "Da segunda equação o valor da incógnita a é igual ao valor da incógnita b. Assim $a = b = 1$, porque $2 \times 1 + 1 = 3$."

Tarefa 2

Pretendia-se que após traçar num referencial a reta $y = 2x + 1$ fossem traçadas outras retas de modo a obter os Sistemas pedidos.

Na alínea a) (Sistema impossível), as alunas, observam: "as retas têm que ser paralelas, têm o mesmo declive." E escrevem $y = 2x$.

Na alínea b) (Sistema possível indeterminado), afirmam: "as retas têm que coincidir, e como tal optam pela mesma expressão algébrica."

Na alínea c) (Sistema possível determinado) concluem: "as retas têm que se intersetar, portanto podemos escolher um declive simétrico." E optam pela expressão $y = -2x + 1$.

De seguida resolvem as três alíneas com recurso à calculadora gráfica.

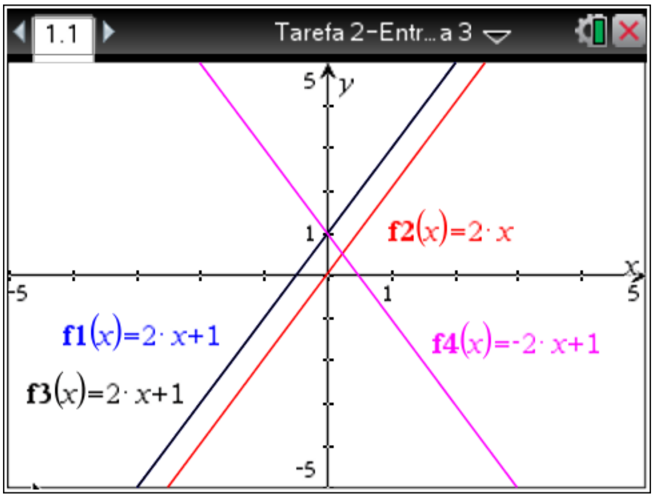


Figura 5. 18 - Resposta do grupo (F e M) às alíneas a), b) e c) da tarefa 2 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Tarefa 3

Na tarefa 3 após apresentação de um Sistema de duas Equações a duas incógnitas onde se identificavam as incógnitas x e y aí presentes, pedia-se para elaborar um enunciado que fosse representativo dessa situação.

Após uma leitura do enunciado e pensarem um pouco, as alunas elaboraram o enunciado que a seguir se apresenta:

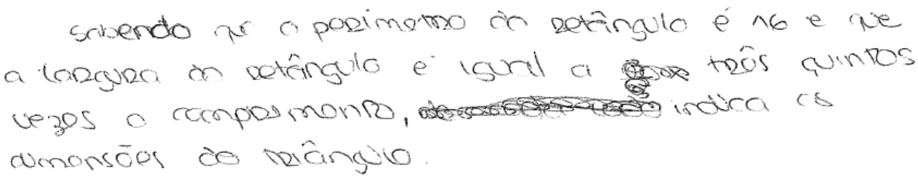

Sabendo que o perímetro do retângulo é 16 e que a largura do retângulo é igual a três quintos vezes o comprimento, indica as dimensões do retângulo.

Figura 5. 19 – Resposta do grupo (F e M) à tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Tarefa 4

Na alínea a) pedia-se para considerar dois pontos de uma determinada reta.
As alunas mostraram-se um pouco confusas por considerarem não serem fornecidos quaisquer dados.

Aluna: Ó professora nem sabemos de que reta se trata! Arranjamos pontos assim…

Investigadora: Então eu vou indicar as coordenadas de dois pontos. Podem ser (-1;1) e (0;4).

Na alínea b) (escrever a expressão que define a reta r), as alunas identificaram a expressão analítica de uma Função afim e escreveram:

$$(-1;1)\ (0;4)$$
$$x\ \ y\ \ x\ \ y$$

$$y = kx + b$$

$$\begin{cases} 1 = -1k + b \\ 4 = 0k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1k - 1 \Leftrightarrow \\ \text{——} \end{cases} \begin{cases} \text{——} \\ 4 = b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4 = -1k - 1 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1k = -1 - 4 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -5 \\ b = 4 \end{cases}$$

$$\boxed{y = -5x + 4}$$

Figura 5. 20 – Resposta do grupo (F e M) à alínea b) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Ainda ansiosas na execução deste procedimento, as alunas cometeram um erro na resolução da primeira equação, o que interferiu no resultado final.

Na alínea c) foi novamente a investigadora quem forneceu as coordenadas dos pontos: (0;1) e (1;-3).

Mais cientes do que estavam a fazer, na alínea d), (escrever a expressão da reta s) procederam da seguinte forma:

$$\begin{cases} y = kx + b \\ 1 = 0k + b \end{cases} \quad y = kx + b \quad \begin{cases} 1 = 0k + b \\ -3 = 1k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = b \\ -1k = 1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ -1k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ k = -4 \end{cases}$$

$$\boxed{y = -4x + 1}$$

Figura 5. 21 - Resposta do grupo (F e M) à alínea d) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Na alínea e) responderam corretamente ao que era pedido escrevendo o Sistema formado pelas expressões obtidas nas alíneas anteriores:

A alínea f) (solução do Sistema de Equações obtido na alínea anterior) foi resolvida com recurso à calculadora gráfica.

As alunas começaram por representar as retas correspondentes às duas expressões anteriormente determinadas, encontraram uma janela de visualização adequada e de seguida determinaram o ponto de interseção de ambas as retas:

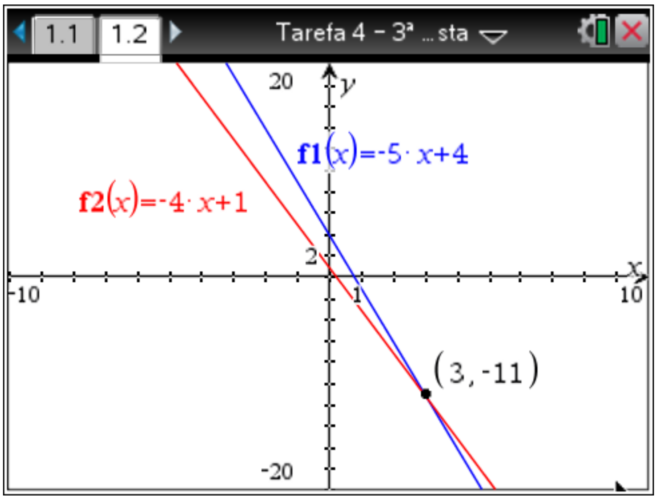


Figura 5. 22 - Resposta do grupo (F e M) à alínea f) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Nas três primeiras tarefas deste conjunto, as alunas não manifestaram dificuldade. Utilizaram diferentes representações e mais uma vez fizeram um uso proficiente da calculadora gráfica. A quarta tarefa, além de apresentar um grau de dificuldade superior não fazia parte da lista de tarefas que as alunas habitualmente executavam, pelo que, apesar de ser orientada suscitou, no início, alguma confusão. Após esta fase, as alunas compreenderam o que estavam a determinar e tudo decorreu com normalidade. Também aqui fizeram um uso proficiente da calculadora gráfica e utilizaram-na essencialmente como ferramenta de visualização.

No decorrer da realização dos três conjuntos de tarefas propostos, as alunas realizaram diversas aprendizagens relativamente a conceitos relacionados com as Funções e com os Sistemas de Equações, tendo a calculadora gráfica desempenhado um papel fundamental como mediadora dessa aprendizagem.

5.1.2. O grupo (J e L)

5.1.2.1. Nas Tarefas Matemáticas (1)

Nesta tarefa pretendia-se que os alunos interpretassem um problema real para darem resposta às seis questões colocadas.

Depois de terem lido o problema, os alunos, preencheram a tabela da alínea a), sem demonstrarem dificuldade.

Na alínea b), um pouco indecisos na resposta, apresentaram o seguinte:

Empresa A = 30 euros

Empresa B = 27 euros

11 x 2 + 5 = 27

Figura 5. 23 - Resposta do grupo (J e L) à questão b) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Para o valor a pagar, optando pela empresa B, os alunos começaram por escrever:
Empresa B = 27 euros mas riscaram. À frente escreveram 26 euros e também riscaram.

[A investigadora interfere]

> Investigadora: Não é melhor pensarem um pouco antes de responder?
>
> Aluno: Sim, mas tem que ser 27€, porque temos que considerar 11 minutos a 2 euros e acrescentar a taxa.

No que respeita ao valor correspondente à empresa C os alunos respondem 3x11é 33€, mas não escreveram a resposta.

Na alínea c) responderam:

Escolhia a empresa C porque $\frac{12}{3} = 4h$

Na A ele pagaria sempre 30 euros

Figura 5. 24 - Resposta do grupo (J e L) à questão c) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Na alínea d) responderam, sem dificuldade:

A -> 30

B -> y = 2u + 5

C -> 3u

Figura 5. 25 - Resposta do grupo (J e L) à questão d) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Para dar resposta à alínea e), os alunos utilizaram a calculadora gráfica:

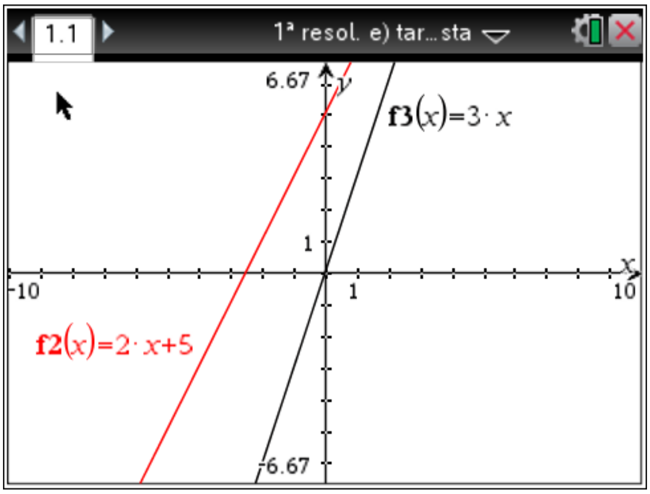


Figura 5. 26 - Tentativa de resposta do grupo (J e L) à questão e) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Aluna: Olha! Temos que alterar a janela. A primeira Função nem se vê.

Aluno: Pois não. Era y=30 e o eixo dos y só vai até seis e tal.

Após as alterações efetuadas obtiveram o seguinte gráfico:

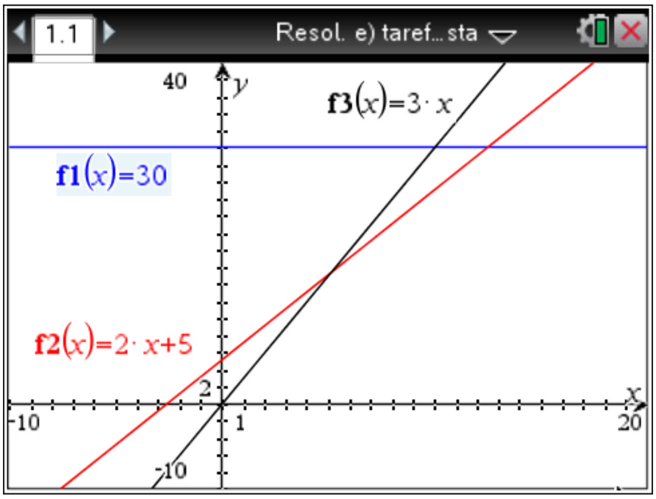


Figura 5. 27 - Resposta do grupo (J e L) à questão e) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Para responder à alínea f), os alunos utilizaram a informação do enunciado e o gráfico da alínea anterior.

A emprosa qe disponibiliza melhores condições é a emprosa A, pois ele fez uma estimativa qee iria utilizar 20 horas e o melhor preço seria o da emprosa A.

Figura 5. 28 - Resposta do grupo (J e L) à alínea f) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Neste conjunto de tarefas, os alunos demonstraram alguma indecisão na resposta à alínea b) e revelaram pouca habituação à escrita de composições matemáticas. Trabalharam os conceitos de Função constante, linear e afim e as respetivas expressões algébricas. Na questão que lhes é solicitada a representação gráfica recorrem à calculadora. Apesar de ainda se encontrarem numa fase de instrumentalização, já manipulam bem a janela de visualização. Pode dizer-se que utilizam esta ferramenta de um modo semi – proficiente.

5.1.2.2. Nas Tarefas Matemáticas (2)

Este conjunto de tarefas era constituído por quatro tarefas.

Tarefa 1

Na alínea a) os alunos determinaram a imagem de um determinado objeto, sem dificuldade.

Na alínea b), também sem dificuldade, determinaram o objeto correspondente a uma determinada imagem.

Para responderem à alínea c) apresentaram o seguinte:

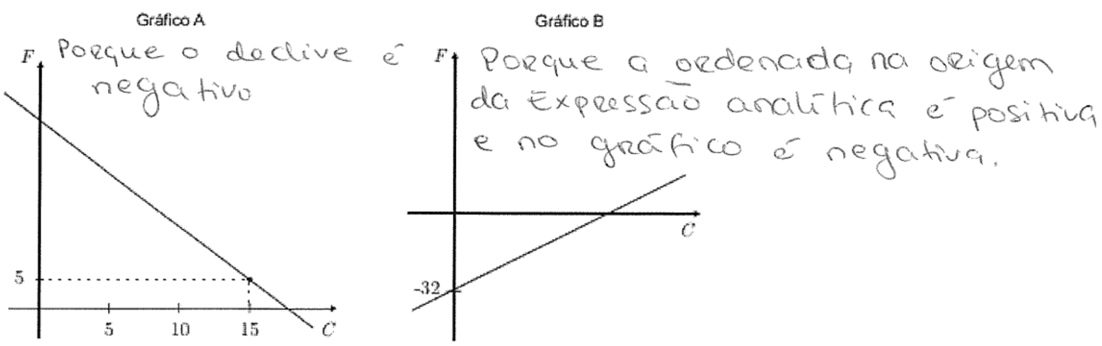


Figura 5. 29 - Resposta do grupo (J e L) à alínea c) da tarefa 1 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Tarefa 2

Na alínea a) responderam: Representa todas as turmas do 5.º e do 6.º ano.

Investigadora: Leiam bem o enunciado. Será que estão a identificar bem as incógnitas x e y, ou seja, x e y representam o número de turmas do 5.º e 6.º anos respetivamente?

Os alunos, olharam novamente para o problema, pensaram um pouco, mas não registaram qualquer alteração. Nesta questão, parecem não ter feito uma interpretação correta da expressão algébrica que lhes era fornecida.

Na alínea b), apresentaram o sistema de equações:

$$\begin{cases} 4w + 2y = 67 \\ 4w + 5y = 71 \end{cases}$$

Figura 5. 30 - Resposta do grupo (J e L) à alínea b) da tarefa 2 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Mais uma vez, os alunos não interpretaram corretamente o enunciado e manifestaram dificuldades na transição da linguagem corrente para a linguagem matemática.

Tarefa 3

Na passagem a esta tarefa, o aluno L pegou na calculadora gráfica, enquanto discutia com a colega J o valor da ordenada do ponto B:

A resposta à alínea a), foi obtida por observação do gráfico que lhes era fornecido:

A ordenada é 4,5 porque é o ponto de interseção da reta s com o eixo y (ordenada na origem)

Figura 5. 31 - Resposta do grupo (J e L) à alínea a) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

No entanto, confirmaram o valor obtido recorrendo à calculadora gráfica:

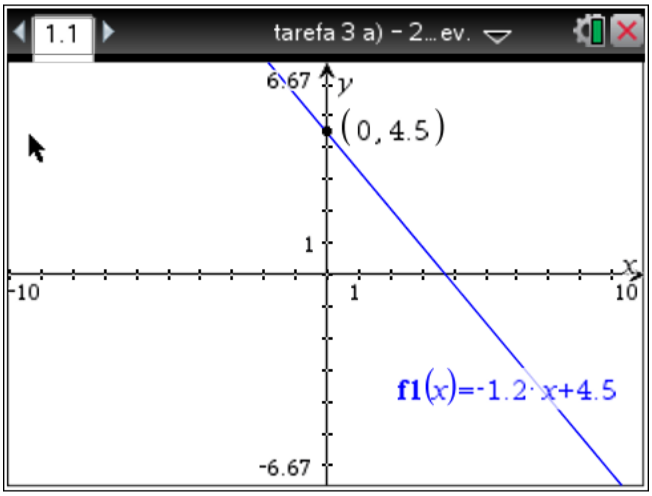


Figura 5. 32 - Resposta do grupo (J e L) à alínea a) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Os alunos encontram-se numa fase de apropriação e exploração da calculadora. Apesar de a utilizarem apenas para confirmação do resultado obtido analiticamente, executaram corretamente esses comandos.

Na alínea b), comentaram: vamos determinar o objeto cuja imagem é zero e obtiveram a resposta graficamente:

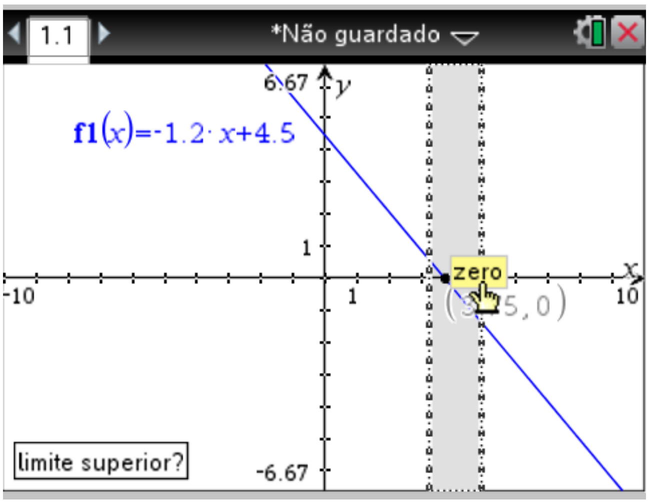


Figura 5. 33 - Resposta do grupo (J e L) à alínea b) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Obtiveram como resultado o valor correspondente à opção C.

Na resolução desta alínea, os alunos optaram logo pela resolução gráfica. Quer parecer que começam a selecionar as tarefas de acordo com o conhecimento que vão adquirindo da calculadora gráfica e das suas potencialidades, encontrando-se assim numa fase de instrumentalização.

Na alínea c), era pedido para resolver analiticamente, mas os alunos começaram pela resolução gráfica e só depois passaram à resolução analítica. Na resolução gráfica apresentam o seguinte:

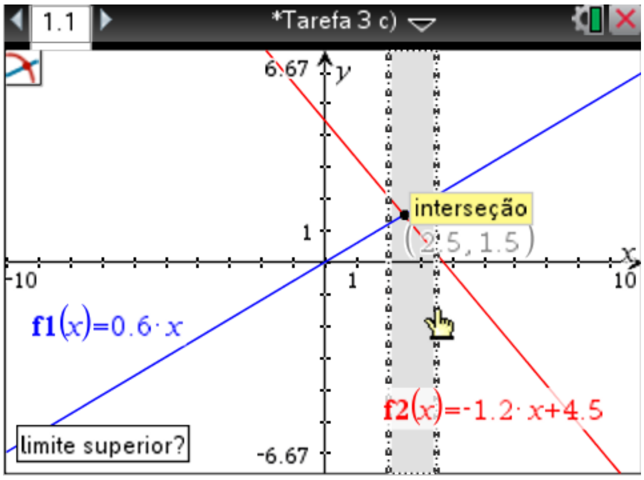


Figura 5. 34 - Resposta do grupo (J e L) à alínea c) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2), com recurso à calculadora gráfica

De seguida procederam à resolução analítica:

$$\begin{cases} y = 0,6x \\ y = -1,2x + 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 0,6x = -1,2x + 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 0,6x + 1,2x = 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ 1,8x = 4,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ x = \frac{4,5}{1,8} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \_\_\_\_ \\ x = 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0,6 \times 2,5 \\ x = 2,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1,5 \\ x = 2,5 \end{cases}$$

$$C.S = (2,5 ; 1,5)$$

Figura 5. 35 - Resposta do grupo (J e L) à alínea c) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2), analiticamente

O facto de os alunos conhecerem um número cada vez maior das potencialidades da calculadora gráfica, permitiu-lhes terem um conhecimento antecipado da solução do Sistema de Equações. Uma vez que a resolução analítica também está correta, pode constatar-se que os alunos resolveram o Sistema de Equações lineares transitando entre as duas representações.

Na alínea d), utilizando os dados obtidos nas alíneas anteriores, os alunos determinaram a área do triângulo analiticamente:

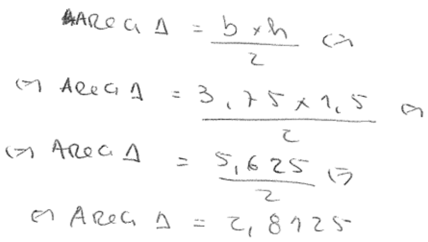


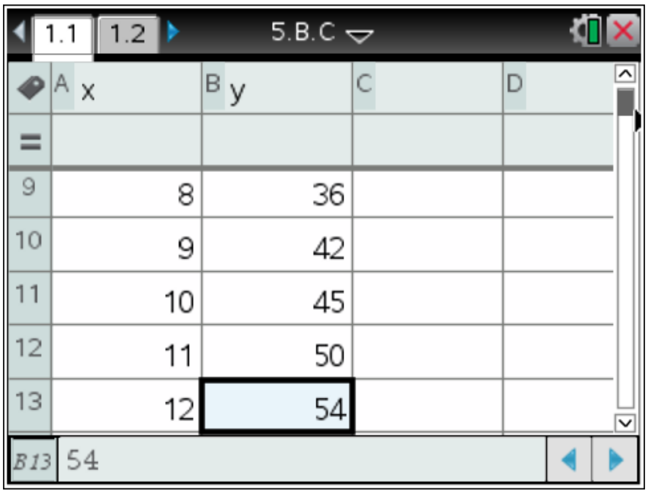
Figura 5. 36 - Resposta do grupo (J e L) à alínea d) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Tratando-se de um exercício cuja resolução dependia apenas de valores determinados anteriormente, os alunos resolveram analiticamente, utilizando a calculadora gráfica apenas para efectuarem cálculos numéricos - como ferramenta computacional.

Tarefa 4

Após a leitura do enunciado e interpretação da tabela, os alunos, responderam corretamente à alínea a).

Nas alíneas b) e c), após introdução dos dados na calculadora gráfica, apresentaram a seguinte resposta:



	A x	B y	C	D
=				
9	8	36		
10	9	42		
11	10	45		
12	11	50		
13	12	54		

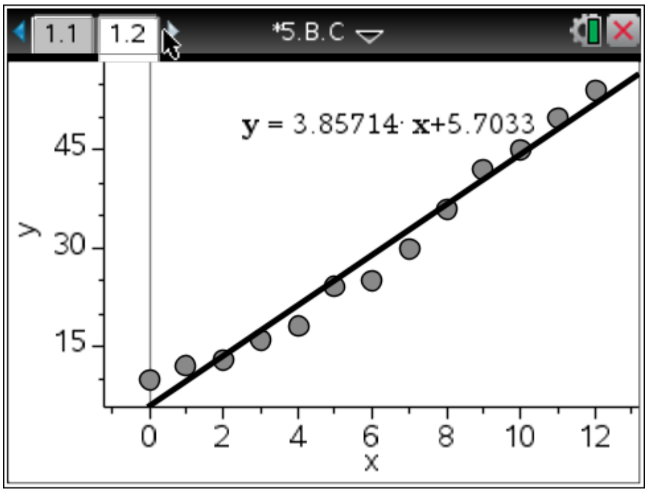


Figura 5. 37 - Resposta do grupo (J e L) às alíneas b) e c) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Apresentaram como modelo de regressão linear a equação: $y = 3{,}8x + 5{,}7$.

A resposta à alínea d) foi obtida a partir expressão obtida na calculadora gráfica:

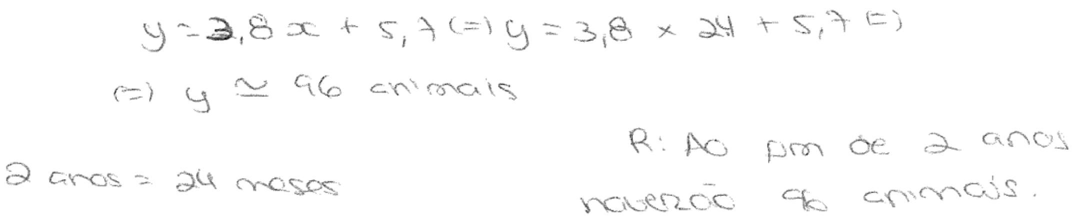


Figura 5. 38 - Resposta do grupo (J e L) à alínea d) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

O segundo conjunto de tarefas foi resolvido pelos processos que os alunos consideraram mais apropriados. Interpretaram informação fornecida de diferentes modos e trabalharam conceitos como objeto, imagem, declive e ordenada na origem.

Ao longo da resolução deste conjunto de tarefas notou-se evolução no que respeita à utilização da calculadora gráfica. Além de ser usada de diferentes modos, os alunos vão fazendo cada vez mais um uso proficiente desta ferramenta. Tiveram ainda a oportunidade de explorar uma situação referente à modelação matemática, o que não seria possível sem o recurso a esta tecnologia.

Foram identificadas algumas lacunas ao nível da interpretação de enunciados, na transição de linguagem corrente para linguagem matemática e na utilização de símbolos algébricos.

A calculadora gráfica foi uma ferramenta essencial na colmatação das dificuldades evidenciadas. O facto de por vezes a resolução gráfica preceder a resolução algébrica proporcionou aos alunos maior confiança e predisposição para a resolução das tarefas propostas.

5.1.2.3. Nas tarefas Matemáticas (3)

Este conjunto era constituído por quatro tarefas.

Tarefa 1

Após identificarem, na segunda equação, a igualdade entre as incógnitas x e y, os alunos resolveram esta tarefa por tentativa. Escolheram alguns pares ordenados cujas coordenadas fossem iguais e substituíram na primeira equação.

a = b

(1; 1) $\quad 2 \times 1 + 1 = 3$ verdadeiro

$2 \times 5 + 5 = 3$ Falso

(5; 5)

A solução do sistema é (1; 1)

Figura 5. 39 - Resposta do grupo (J e L) à tarefa 1 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Apesar da escolha do primeiro par ordenado conduzir a uma proposição verdadeira, os alunos parecem não estar conscientes da unicidade da solução e experimentam um segundo par ordenado a partir do qual obtêm uma proposição falsa. De seguida respondem: a solução do sistema é o par ordenado (1, 1).

Tarefa 2

Na alínea a) respondem:

$y = 2x + 2$

Para ser um sistema impossível as retas têm de paralelas, ou seja têm de ter o mesmo declive.

Figura 5. 40 - Resposta do grupo (J e L) à alínea a) da tarefa 2 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Na alínea b), afirmam:

Para ser um sistema possível determinado, as retas têm que coincidentes

$2y = 4x + 2$

Figura 5. 41 - Resposta do grupo (J e L) à alínea b) da tarefa 2 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Na alínea c), concluem: Para termos um Sistema possível determinado, as retas têm que ter um ponto em comum. De seguida recorrem à calculadora gráfica onde traçam a reta dada.

Aluno L: Agora as retas têm que cruzar. Se o declive estiver ao contrário…

[E vão investigando]

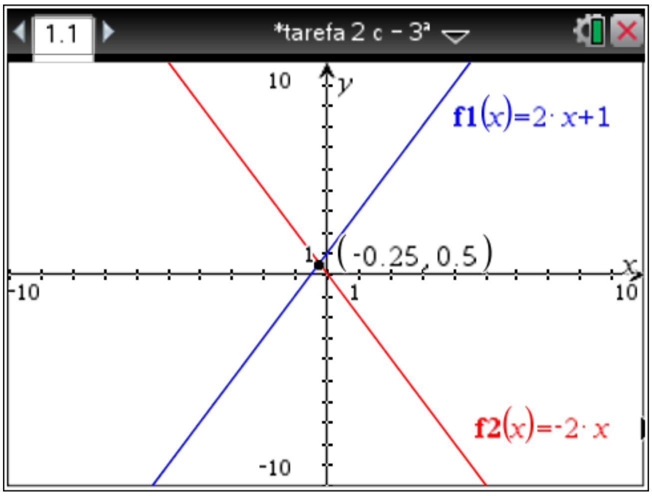
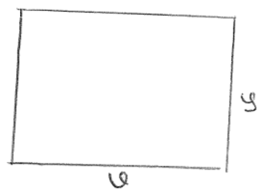


Figura 5. 42 - Resposta do grupo (J e L) à alínea c) da tarefa 2 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Os alunos demonstram ter conhecimento da classificação de Sistemas de Equações e foram completando as suas hipóteses com recurso á calculadora gráfica. A escolha de um valor simétrico para o declive da reta apresentada parece estar relacionado com o facto de os alunos considerarem que desta forma a inclinação das retas permite a sua interseção.

Tarefa 3

Nesta tarefa, os alunos começaram por ler o enunciado e apresentar um esquema representativo dos dados do problema:



$2x + 2y = 16$ é o perímetro do retângulo

A largura é $\frac{3}{5}$ do comprimento

Sendo o perímetro da figura 16 e sabendo que a largura é $\frac{3}{5}$ do comprimento, calcula as dimensões do triângulo.

Figura 5. 43 - Resposta do grupo (J e L) à tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Na execução desta tarefa, apesar de apresentarem um raciocínio correto, os alunos manifestam alguma dificuldade em expressar por escrito as suas ideias. Sendo uma tarefa cuja resolução não contemplava o uso da calculadora gráfica, notou-se a influência deste artefacto na qualidade das aprendizagens.

Tarefa 4

Na alínea a), a investigadora forneceu as coordenadas dos pontos (1;1) e (2,2), para evitar alguma ansiedade.

Na alínea b), os alunos começaram por identificar a abcissa e ordenada em cada um dos pontos, bem como a expressão analítica de uma Função afim. De seguida apresentam a seguinte resolução:

$$(\underset{x}{1}; \underset{y}{1}) \quad (\underset{x}{2}; \underset{y}{2})$$

$$y = kx + b$$

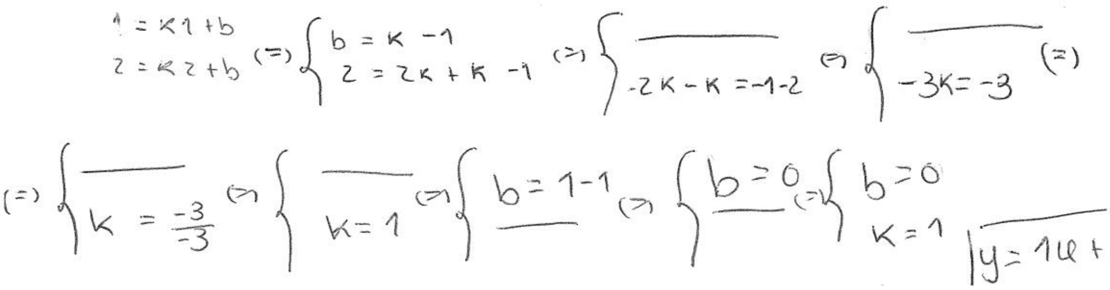


Figura 5. 44 - Resposta do grupo (F e M) à alínea b) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Na alínea c), as coordenadas dos pontos foram novamente fornecidas pela investigadora: (0,1) e (2,-1).

Na alínea d), utilizando o mesmo processo da alínea anterior determinaram corretamente a equação da reta s.

Na alínea e) escreveram o Sistema formado pelas expressões obtidas nas alíneas anteriores, sem dificuldade.

A alínea f) foi resolvida com recurso à calculadora gráfica. Introduziram as Funções, ajustaram a janela de visualização e obtiveram o gráfico e a solução do Sistema de Equações.

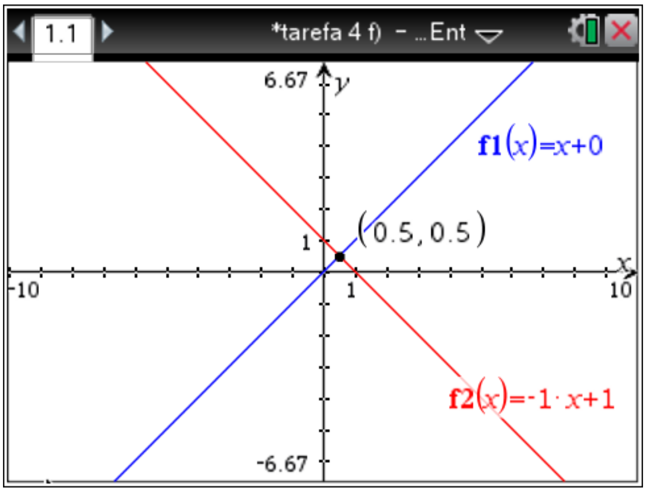


Figura 5. 45 - Resposta do grupo (J e L) à alínea f) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Esta tarefa apresentava um grau de dificuldade acrescido e os alunos não estavam habituados a estas situações, no entanto, o conhecimento de conceitos que foram adquirindo e o uso proficiente que já fazem da calculadora gráfica permitiu-lhes a sua resolução de forma correta.

Assim pode constatar-se que a calculadora gráfica é um bom mediador das aprendizagens uma vez que contribui para superar dificuldades na execução de tarefas mais complexas permitindo aos alunos evoluírem de forma positiva.

No terceiro conjunto de tarefas, os alunos interiorizaram conceitos relacionados com as Funções e Sistemas de Equações. Utilizaram diferentes representações e para tal selecionaram as situações em que consideraram mais apropriado o uso da calculadora gráfica, resolvendo outras por processos analíticos.

Pode dizer-se que este grupo de alunos utilizou a calculadora gráfica: como ferramenta computacional, ferramenta de recolha e análise de dados, ferramenta de visualização e de verificação, fazendo-o de um modo que se pode considerar proficiente.

5.1.3. O grupo (D e R)

5.1.3.1. Nas Tarefas Matemáticas (1)

Após a leitura do problema, os alunos preencheram a tabela da alínea a), sem dificuldade.

Na alínea b), apresentaram a seguinte resposta:

A = 30 € B = 27 € C = 33 €

Figura 5. 46 - Resposta do grupo (D e R) à alínea b) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

[Perante esta resposta, a investigadora questionou-os relativamente a estes resultados]

Investigadora: Importam-se de explicar esses resultados.
Alunos: Na empresa A é sempre trita euros, por isso é trinta. Na B é cinco euros mais dois euros vezes onze horas, por isso dão vinte e sete euros.
Investigadora: Mas no enunciado dessa alínea refere que o Francisco utiliza internet durante dez horas e meia e não onze horas.
Aluna R: Mas nós já ouvimos a explicação de uma colega e percebemos que o tarifário não tem meia hora, assim dez horas e meia passa para onze horas.
Investigadora: Muito bem! Se perceberam continuem.
Aluno D: Na C é três euros vezes onze horas, o que dá trinta e três euros.

Na alínea c), os alunos responderam $c = 4h$

Investigadora: Mais uma vez vou pedir para justificarem a resposta.
Aluno D: Nós pensamos assim:

A empresa A nem pensar porque paga sempre trinta e ele só tem doze euros.
Na C, como cada hora custa três euros, dá para quatro horas.
Na B, as quatro horas custaria, treze euros.
Por isso aconselhávamos a C.

Na alínea d) responderam, sem dificuldade:

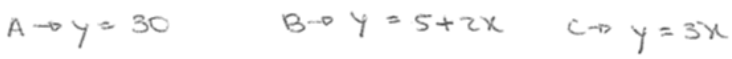


Figura 5. 47 - Resposta do grupo (D e R) à alínea d) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Na resposta à alínea e), os alunos utilizaram a calculadora gráfica, e numa primeira abordagem obtiveram e seguinte gráfico:

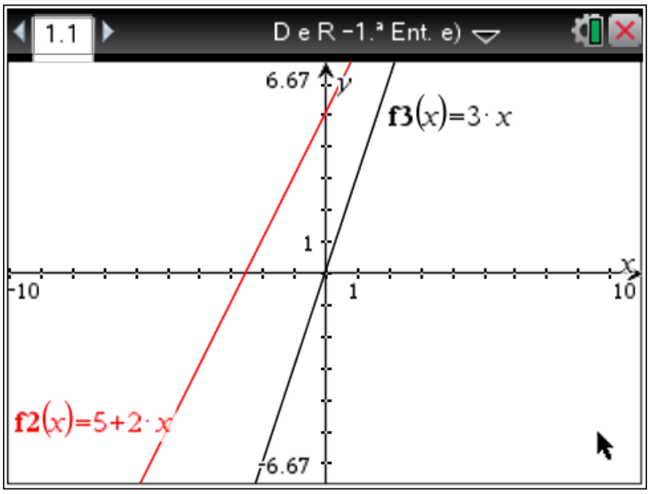


Figura 5. 48- Tentativa de resposta do grupo (D e R) à questão e) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Aluno D: Pois, lá vamos ter que mudar a janela. Só vemos duas Funções mas nem dá para ver se elas se cruzam.

Aluna R: Espera, vamos pensar. Se era y=30, temos que aumentar para cima.

Após as alterações efetuadas obtiveram:

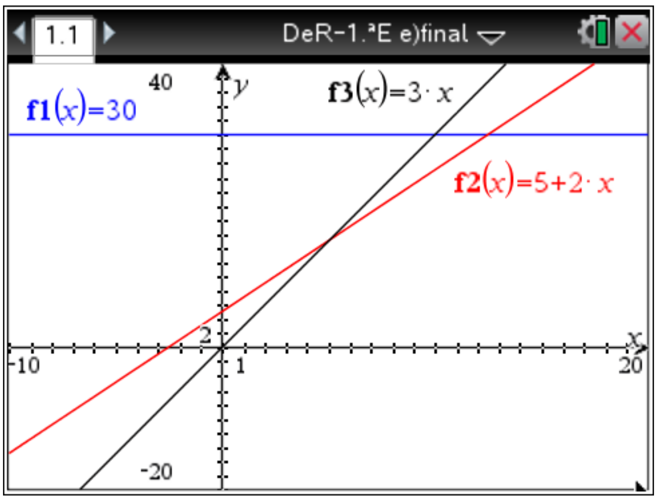


Figura 5. 49 - Resposta final do grupo (D e R) à questão e) do Guião das Tarefas Matemáticas (1)

Na alínea f), os alunos, apesar de terem lido novamente o enunciado e olharem fixamente para o gráfico obtido na alínea anterior não apresentaram qualquer resposta.

[A investigadora manifesta-se no sentido de ajudar o grupo]

> Investigadora: Vão comparando as Funções duas a duas. Comecem por olhar, por exemplo, para as Funções f_1 e f_3. Até quantas horas pode dizer-se que a f_3 é mais vantajosa?

[A investigadora optou por se afastar um pouco e deixar que os alunos respondessem por iniciativa própria]

Os alunos não apresentaram qualquer resposta a esta questão. Revelaram dificuldades ao nível da interpretação do enunciado e mostrando-se reticentes relativamente à composição matemática, optaram por não responder.

No que respeita à resolução deste conjunto de tarefas, os alunos demonstraram compreensão de alguns conceitos, no entanto revelaram dificuldade na expressão das suas ideias. Utilizaram a calculadora gráfica para responder à alínea e) e apesar de ainda se encontrarem numa fase de instrumentalização, fizeram-no de forma correta.

5.1.3.2. Nas Tarefas Matemáticas (2)

Este conjunto contemplava quatro tarefas.

Tarefa 1

Na alínea a), os alunos, consideraram (-25) como um objeto e determinaram a respetiva imagem, utilizando a calculadora apenas para a realização de cálculos:

$$1,8(-25)+32=-13$$

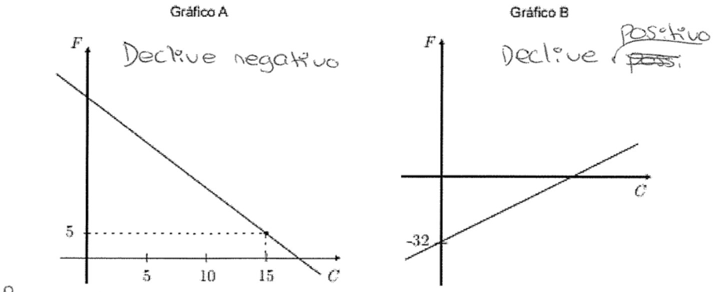
Figura 5. 50 - Resposta do grupo (D e R) à alínea a) da tarefa 1 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Na alínea b) determinaram o valor da temperatura em graus Celsius (objeto) correspondente a 95 graus Fahrenheit (imagem):

$$C = \frac{95-32}{1,8} = 35$$

Figura 5. 51 - Resposta do grupo (D e R) à alínea b) da tarefa 1 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Para responder à alínea c) apresentaram o seguinte:



Regeite o grafico A, porque o declive é negativo e regeite o gráfico B, porque apesar do declive ser positivo, a ordenada na origem é negativa

Figura 5. 52 - Resposta do grupo (D e R) à alínea c) da tarefa 1 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Das respostas aqui apresentadas, pode constatar-se que os alunos adquiriram conceitos como objeto, imagem, declive de uma reta e ordenada na origem. A resolução da equação que haviam esquematizado fez-se de forma a ignorar alguns passos intermédios e as respostas são muito sucintas, o que revela dificuldade na expressão das suas ideias.

Tarefa 2

Na alínea a) responderam: É o total de alunos que frequentam o 5.º e 6.ºanos.

Na alínea b), apresentaram o Sistema de Equações:

$$\begin{cases} x + 2y = 67 \\ 2x + y = 71 \end{cases}$$

Figura 5. 53 - Resposta do grupo (D e R) à alínea b) da tarefa 2 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Tarefa 3

Na alínea a), apresentaram a seguinte resposta:

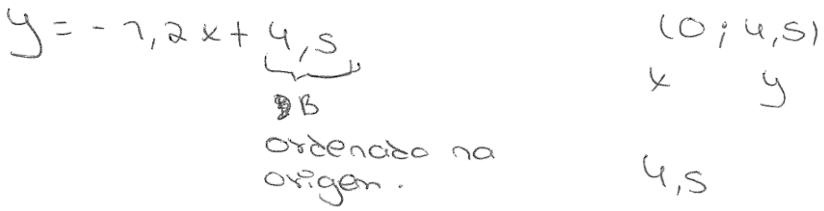


Figura 5. 54 - Resposta do grupo (D e R) à alínea a) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Na alínea b) apresentaram como resposta a opção (B), recorrendo à calculadora gráfica:

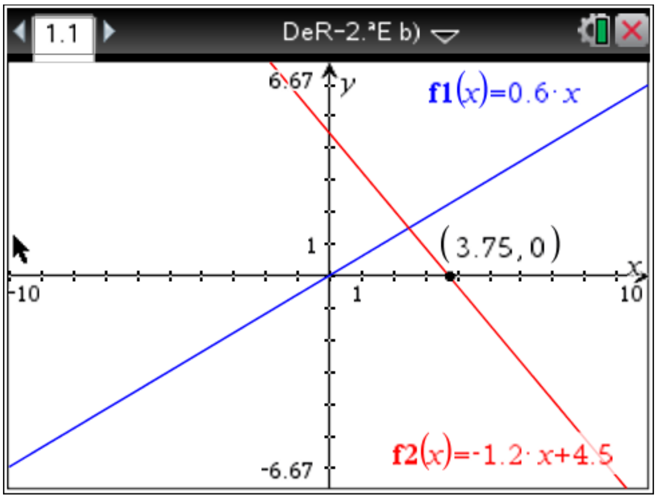


Figura 5. 55 - Resposta do grupo (D e R) à alínea b) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Na alínea c), apesar de ser pedido a resolução analítica, os alunos, começaram pela resolução gráfica passando depois a responder ao que era pedido:

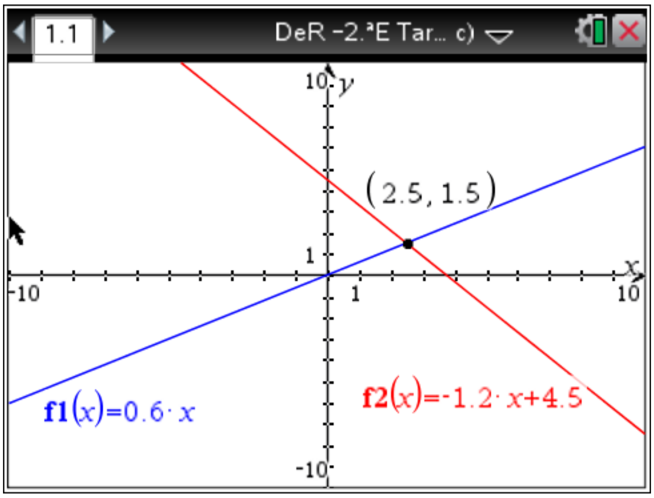


Figura 5. 56 - Resposta do grupo (D e R) à alínea c) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2), com recurso à calculadora gráfica

Ao determinarem a solução do sistema de equações com recurso à calculadora gráfica, os alunos referiram sentir-se mais seguros pois assim já sabiam qual o par ordenado que iam obter a quando da resolução algébrica. Respondendo ao que era pedido, determinar, analiticamente, as coordenadas do ponto I, os alunos procederam à resolução do Sistema de Equações pelo método de substituição:

$$\begin{cases} y=-1,2x+4,5 \\ y=0,6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,6x=-1,2x+4,5 \\ y=0,6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,6x+1,2x=4,5 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,8x=4,5 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4,5}{1,8} \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2,5 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2,5 \\ y=0,6x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ y=0,6\times 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ y=1,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2,5 \\ y=1,5 \end{cases} \quad S=(2,5;1,5)$$

Figura 5. 57 - Resposta do grupo (D e R) à alínea c) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2), analiticamente

Confirmaram assim a solução do Sistema de Equações e portanto as coordenadas do ponto I.

Na alínea d) calcularam a área do triângulo analiticamente, utilizando os valores determinados nas alíneas anteriores. A calculadora gráfica foi utilizada apenas para efetuar os cálculos numéricos:

$$A=\frac{b\times a}{2} \qquad =\frac{3,75\times 1,5}{2} =2,8125$$

Figura 5. 58 - Resposta do grupo (D e R) à alínea d) da tarefa 3 do Guião das Tarefas Matemáticas (2)

Tarefa 4

Após a leitura do enunciado e interpretação da tabela apresentada, os alunos, responderam corretamente à alínea a), onde se pretendia que verificassem durante quanto tempo foi feita a recolha de dados.

Não responderam às alíneas b) representar os dados através de uma nuvem de pontos; c) determinar um modelo de regressão linear que se ajuste à nuvem de pontos e d) utilizar o modelo anterior para determinar o número de animais existentes na reserva ao fim de dois anos. Para justificar esse facto, os alunos referiram não estarem habituados a esse tipo de exercícios.

Quando questionados sobre a possibilidade de conclusão da tarefa 4, responderam não saberem resolver quer analítica ou graficamente.

No que respeita à resolução deste conjunto de tarefas, os alunos resolveram a maioria das tarefas. Demonstraram compreensão de alguns conceitos, no entanto revelaram dificuldade ao nível da comunicação e escrita dos seus raciocínios bem como no trabalho com situações que não façam parte da sua rotina de sala aula, nomeadamente o modelo de regressão linear. Apesar de utilizarem a calculadora gráfica para responder a algumas questões e procederem de forma correta, os alunos ainda não têm conhecimento suficiente das potencialidades desta ferramenta para a poderem utilizar de forma proficiente.

5.1.3.3. Nas Tarefas Matemáticas (3)

Este conjunto era constituído por quatro tarefas.

Tarefa 1

Após a leitura do enunciado, os alunos, ficaram um pouco perplexos e sem resposta. A investigadora intervém solicitando que comecem por observar a segunda equação e passado algum tempo questionou os alunos.

> Investigadora: Que valores devem tomar as incógnitas ***a*** e ***b*** para que a diferença entre elas seja zero?

Os alunos responderam:

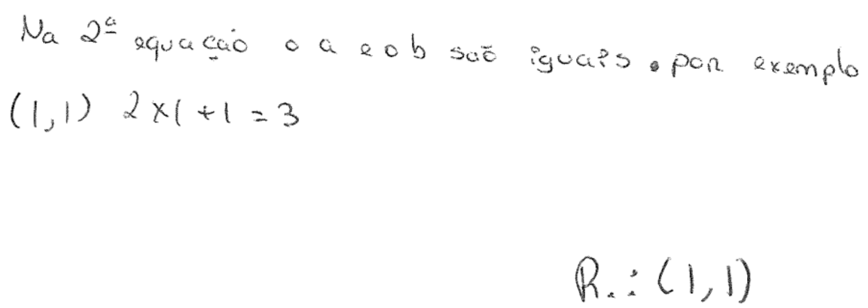

Na 2ª equação o a e o b são iguais, por exemplo
(1,1) 2x1+1=3
R.: (1,1)

Figura 5. 59 - Resposta do grupo (D e R) à tarefa 1 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Tarefa 2

Na resolução das alíneas referentes a esta tarefa, os alunos não demonstraram terem presentes os conhecimentos necessários no que respeita à classificação de Sistemas de Equações.

Aluna R: Nós temos um esquema com o resumo desta matéria mas não nos lembramos muito bem. Podemos só consultar rapidamente?

Investigadora: Podem sim.

Após a leitura e análise do referido esquema onde constava um esboço do gráfico correspondente a cada uma das situações de classificação dos Sistemas de Equações, os alunos recorreram à calculadora gráfica para representarem as Funções seguintes:

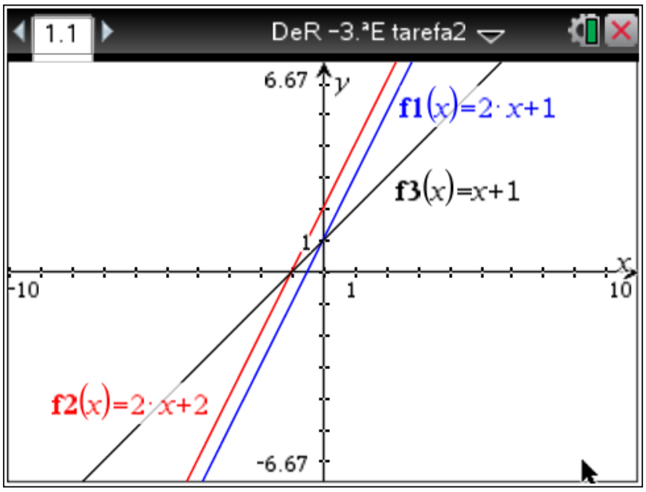


Figura 5. 60 - Resposta do grupo (D e R) à tarefa 2 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Apesar de estabelecerem uma analogia entre algumas das situações esquematizadas no caderno diário (retas paralelas e concorrentes), os alunos não fizeram corresponder cada uma das representações gráficas à resposta de cada uma das alíneas.

Tarefa 3

Nesta tarefa, pretendia-se o enunciado de um problema que fosse representado pelo Sistema de Equações dado. Os alunos demonstraram dificuldade na interpretação do Sistema de Equações, e, apesar de serem identificadas as variáveis x e y como sendo respetivamente o comprimento e a largura de um retângulo, apenas escreveram: " Descobre qual é o comprimento e a largura do retângulo."

Tarefa 4

Na alínea a), a investigadora forneceu as coordenadas dos pontos (-1;1) e (0,4).

Na alínea b), os alunos referiram não estar a perceber.

[A investigadora intervém]

Investigadora: Escrevam a expressão analítica de uma Função afim.

Os alunos escreveram: $y = kx + b$.

Investigadora: Agora, vejam onde devem substituir os valores das coordenadas dos pontos que eu dei na alínea a).

Aluna R: No x e no y.

Investigadora: Muito bem. Continuem e procedam da mesma forma para a outra reta.

Os alunos apresentam a seguinte resolução:

$$y = kx + b \qquad y = kx + b$$
$$1 = k \times 1 + b \qquad 4 = k \times 0 + b$$

$$\begin{cases} 1 = k \times 1 + b \\ 4 = k \times 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1k + b \\ 4 = 0 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-b =} \_\_\_ \\ -b = 0 - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1k + 4 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1k = 4 - 1 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1k = 3 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \\ b = \end{cases}$$

$$\boxed{y = -3x + 4}$$

Figura 5. 61 - Resposta do grupo (D e R) à alínea b) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Na alínea c), as coordenadas dos pontos foram novamente fornecidas pela investigadora: (0,1) e (1,-3).

Na alínea d), utilizando o processo da alínea b), determinaram corretamente a expressão algébrica da reta s.

$$\begin{cases} 1 = k \times 0 + b \\ -3 = k \times 1 + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 + b \\ -3 = 1k + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b = 0 - 1 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b = -1 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ -3 = k + 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ -k = 1 + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ -k = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ k = -4 \end{cases} \qquad \boxed{y = -4x + 1}$$

Figura 5. 62 - Resposta do grupo (D e R) à alínea d) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Na alínea e) escreveram o sistema formado pelas expressões obtidas nas alíneas anteriores, sem dificuldade.

$$\begin{cases} y = -4x + 1 \\ y = -3x + 4 \end{cases}$$

Figura 5. 63 - Resposta do grupo (D e R) à alínea e) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Para responder à alínea f), os alunos, utilizaram a calculadora gráfica. Introduziram as Funções, ajustaram a janela de visualização e obtiveram o gráfico. De seguida determinaram o ponto de interseção das duas retas, e consequentemente a solução do Sistema de Equações:

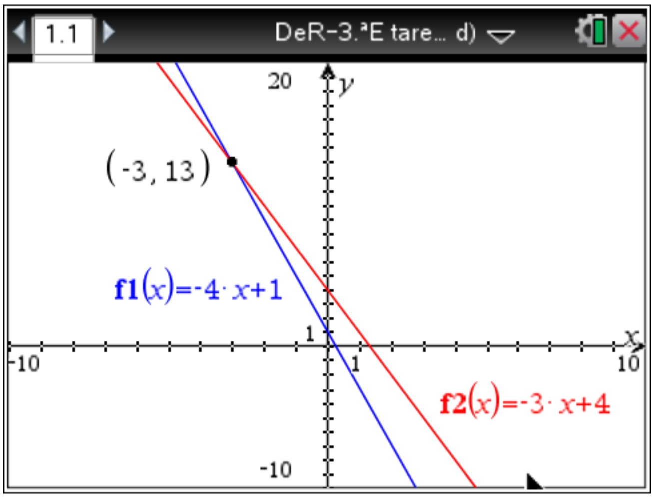


Figura 5. 64 - Resposta do grupo (D e R) à alínea f) da tarefa 4 do Guião das Tarefas Matemáticas (3)

Note-se que apesar de esta tarefa apresentar um grau de dificuldade acrescido e não fazer parte das tarefas que habitualmente resolvem em sala de aula, os alunos reagiram de forma muito positiva e demonstraram um bom desempenho.

Embora o terceiro conjunto de tarefas apresentasse um grau de dificuldade superior, os alunos foram respondendo às diversas situações. Este facto parece estar relacionado com a orientação que lhes foi sendo dada e com os instrumentos que foram adquirindo.

No que respeita ao modo de utilização da calculadora gráfica, este grupo de alunos fê-lo de forma que se pode considerar semi–proficiente, utilizando apenas algumas das potencialidades deste artefacto. Foi utilizada apenas como ferramenta computacional, de verificação e visualização, não indo muito além do que haviam aprendido durante as aulas.

5.2. Reflexão

Como já foi referido, os três conjuntos de tarefas foram aplicados em momentos diferentes principalmente para que fosse possível responder às questões:

Como é que os alunos usam a calculadora gráfica na resolução de tarefas que envolvem Funções e Sistemas de Equações?

Como é que os alunos integram o uso de diferentes representações do conceito de Função?

Qual o papel deste artefacto enquanto mediador das aprendizagens?

Com o estudo restringido aos três pares de alunos e fazendo uma análise do trabalho desenvolvido durante a realização das tarefas propostas pôde constatar-se:

- O grupo (F e M)

Nas tarefas propostas no primeiro conjunto foram trabalhados os conceitos de Função constante, linear e afim, bem como as respetivas representações gráficas e expressões algébricas. Na sua resolução, as alunas, recorreram em primeiro lugar ao lápis e papel e de seguida à calculadora gráfica, que neste caso serviu como ferramenta de verificação, o que se prende com o facto de ainda se encontrarem numa fase de conhecimento e apropriação da calculadora gráfica (instrumentalização). Manifestaram alguma dificuldade em expressar, por escrito, o seu raciocínio e evidenciaram pouco domínio na Comunicação Matemática.

Na resolução do segundo conjunto de tarefas, as alunas não manifestaram dificuldades. Interpretaram informação e conceitos fornecidos de diferentes formas e analisaram o efeito dos parâmetros k e b na representação gráfica de Funções do tipo $y = kx + b$. Utilizaram várias representações e no que respeita à representação gráfica, a calculadora foi usada de diferentes modos: para efetuar cálculos – ferramenta computacional; para confirmar conjeturas - como ferramenta de verificação e para representar e interpretar os dados - como ferramenta de recolha e análise de dados. As alunas selecionaram as tarefas nas quais consideraram benéfico o recurso à calculadora gráfica e de entre as diversas potencialidades, as que consideraram apropriadas para a resolução de cada situação. Pode dizer-se que já se encontram numa fase de instrumentação no que respeita ao uso da calculadora gráfica e fazem-no de forma proficiente.

No terceiro conjunto de tarefas, as alunas utilizaram diferentes representações e mais uma vez fizeram um uso proficiente da calculadora gráfica. Manifestaram dificuldade na realização da última tarefa que além de apresentar um grau de dificuldade superior não fazia parte da lista de tarefas que habitualmente executavam na sala de aula, e, por essa razão, apesar de ser orientada suscitou, no início, algum desconforto. Após esta fase, as alunas compreenderam o que estavam a determinar e tudo decorreu com normalidade. Também aqui fizeram um uso proficiente da calculadora gráfica.

As alunas integraram o uso de diferentes representações e realizaram aprendizagens de conceitos relacionados com as Funções e com os Sistemas de Equações. A calculadora gráfica desempenhou um papel fundamental como mediadora dessa aprendizagem na medida em que permitiu a exploração de várias situações e a resolução de tarefas mais complexas.

- O grupo (J e L)

No primeiro conjunto de tarefas, os alunos revelaram pouca habituação à escrita de composições matemáticas. Trabalharam os conceitos de Função constante, linear e afim e as respetivas expressões algébricas. Quando lhes é solicitada a representação gráfica já recorrem à calculadora gráfica, apesar de ainda se encontrarem numa fase de instrumentalização. Pode dizer-se que o fizeram de um modo semi – proficiente.

O segundo conjunto de tarefas foi resolvido pelos processos que os alunos consideraram mais apropriados. Interpretaram informação fornecida de diferentes modos e trabalharam conceitos como objeto, imagem, declive e ordenada na origem. Ao longo da resolução deste conjunto de tarefas, além de usarem a calculadora gráfica de diferentes modos, os alunos fizeram cada vez mais um uso proficiente desta ferramenta. Foram identificadas algumas lacunas ao nível da interpretação de enunciados, na transição de linguagem corrente para linguagem matemática e na utilização de símbolos algébricos.

No terceiro conjunto de tarefas, os alunos interiorizaram conceitos relacionados com as Funções e Sistemas de Equações. Utilizaram diferentes representações e para tal selecionaram as situações em que consideraram pertinente o uso da calculadora gráfica, resolvendo outras através de processos analíticos.

Pode dizer-se que este grupo de alunos utilizou a calculadora gráfica como ferramenta computacional, ferramenta de recolha e análise de dados, ferramenta de visualização e de verificação, fazendo-o de um modo que se pode considerar proficiente. O conhecimento de conceitos que foram adquirindo e o uso cada vez mais proficiente que fizeram da calculadora gráfica permitiu-lhes a resolução das tarefas propostas. A calculadora gráfica revelou-se um bom mediador das aprendizagens uma vez que contribuiu para superar dificuldades na execução de tarefas mais complexas permitindo aos alunos evoluírem de forma positiva.

- O grupo (D e R)

No que respeita à resolução das tarefas propostas no primeiro conjunto, os alunos demonstraram compreensão de alguns conceitos, no entanto revelaram dificuldade na expressão das suas ideias. Utilizaram a calculadora gráfica para responder a uma das questões e apesar de ainda se encontrarem numa fase de instrumentalização, fizeram-no de forma correta.

No segundo conjunto de tarefas, interiorizaram alguns conceitos, no entanto revelaram dificuldade ao nível da comunicação e escrita dos seus raciocínios bem como no trabalho com situações que não faziam parte da sua rotina de sala de aula. Utilizaram a calculadora gráfica em diversas situações inclusive antecedendo a resolução analítica contribuindo assim para maior segurança e predisposição da resolução algébrica.

Embora o terceiro conjunto de tarefas apresentasse um grau de dificuldade superior, os alunos foram respondendo de forma assertiva às diversas situações. Este facto parece estar relacionado com a orientação que lhes foi sendo dada e com os instrumentos que foram adquirindo.

Este grupo de alunos utilizou a calculadora gráfica como ferramenta computacional, de verificação e visualização, não indo muito além do que haviam aprendido durante as aulas. No que respeita ao modo de utilização, fê-lo de forma que se pode considerar semi–proficiente, utilizando apenas algumas das suas potencialidades. No entanto, esta ferramenta fomentou a passagem entre várias representações revelando-se como mediadora da aprendizagem de vários conceitos.

Pode ainda verificar-se, dos três pares de alunos, que utilizaram diferentes representações no trabalho com Funções e Sistemas de Equações. Recorreram frequentemente à calculadora gráfica sobretudo na resolução de tarefas que envolvessem a representação gráfica. O recurso a esta ferramenta não invalidou a resolução analítica mas antes permitiu aos alunos a representação de um maior número de gráficos em menos tempo, disponibilizando-os assim para a análise de outras situações, o que pode tornar-se vantajoso no seu processo de aprendizagem. Além disso permitiu-lhes o contacto com a modelação matemática, o que não seria possível sem este artefacto.

O papel da professora revelou-se de extrema importância em todo o processo. Utilizou frequentemente a calculadora gráfica e explorou diversas situações, deixando, propositadamente, outras ao cuidado dos alunos. O facto de ter instalado a calculadora gráfica no computador da sala de aula e a sua projeção ser feita no quadro interativo possibilitou aos alunos a visualização e compreensão de todos os procedimentos efetuados. Também o facto de os alunos apresentarem por vezes a resolução de uma mesma tarefa com recurso ao lápis e papel e à calculadora gráfica se prendeu com a metodologia utilizada inicialmente pela professora. A opção por uma das vias foi sendo aperfeiçoada à medida que os alunos conheciam melhor as potencialidades e constrangimentos da calculadora gráfica, se apropriavam deste artefacto e construíam os seus instrumentos.

6. CONCLUSÃO

Este estudo teve como principais objetivos: identificar estratégias utilizadas e eventuais dificuldades manifestadas pelos alunos no seu trabalho com Funções e Sistemas de Equações; analisar como os alunos se apropriaram da calculadora gráfica e de que modo a utilizaram na resolução das tarefas propostas; e compreender como a calculadora gráfica interferiu na aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações.

Nesta sequência procurava-se responder às questões a seguir apresentadas:

Como é que os alunos usam a calculadora gráfica na resolução de tarefas que envolvam Funções e Sistemas de Equações?

Como é que os alunos integram o uso de diferentes representações do conceito de Função?

Qual o papel deste artefacto enquanto mediador das aprendizagens?

De referir que com a introdução da calculadora gráfica não se pretendia colocar à disposição dos alunos uma ferramenta que lhes facilitasse o trabalho, mas sim, que permitisse a ligação entre as várias representações e possibilitasse a resolução de problemas mais exigentes.

No entanto, sentiu-se necessidade de utilizar a calculadora gráfica de forma adequada sendo assim possível explorá-la e rentabilizá-la em prol de um ensino de qualidade como referia Domingos (2011).

Ao longo da realização dos três conjuntos de tarefas notou-se evolução quer ao nível das estratégias delineadas pelos alunos, quer no tempo necessário para a resolução das mesmas, onde a calculadora gráfica teve um papel fundamental, na medida em que permitiu a representação de várias situações em menos tempo.

As principais dificuldades revelaram-se na interpretação de enunciados, sendo estas minimizadas pelo facto de se tratar da resolução de problemas que foram discutidos no grupo turma ou questionados pela investigadora, promovendo a capacidade de resolução de problemas por parte dos alunos (Ponte, Branco & Matos, 2009), não se verificando o mesmo relativamente à comunicação matemática.

No sentido de dar resposta às questões de investigação, relativamente à primeira:

“Como é que os alunos usam a calculadora gráfica na resolução de tarefas que envolvam Funções e Sistemas de Equações?

O modo de utilização da calculadora gráfica parece estar relacionado não só com o tipo de tarefa, mas também com o que era pedido.

Apesar de ser utilizada nos diferentes tipos de tarefas caracterizados por Ponte (2005), este artefacto aparece mais ligado à parte gráfica, de acordo com os modos de utilização definidos por Doerr e Zangor (2000).

A utilização desta ferramenta, além de ampliar o conjunto de representações, permitiu que alunos do 8.º ano de escolaridade explorassem modelos de situações que, normalmente, só são estudados em anos mais avançados, indo assim ao encontro do que era perspectivado no NCTM (2008).

Notou-se evolução quer na resolução das tarefas quer no uso cada vez mais proficiente da calculadora gráfica.

No que diz respeito à segunda questão: "Como é que os alunos integram o uso de diferentes representações do conceito de Função?"

Durante a resolução das tarefas propostas, os alunos estabeleceram contacto e utilizaram várias representações no estudo das Funções e Sistemas de Equações, nomeadamente, através de enunciados, gráficos, tabelas ou algebricamente, o que contribuiu para a compreensão destes conceitos, como referiam Abrantes, Serrazina & Oliveira (1999). Além disso, utilizaram a resolução algébrica e a resolução gráfica, e compararam os resultados dos diferentes registos, de acordo com Almeida e Oliveira (2009).

Na resposta à terceira questão: "Qual o papel deste artefacto enquanto mediador das aprendizagens?"

A calculadora gráfica foi o principal artefacto utilizado como mediador da aprendizagem entre o sujeito (alunos do 8º ano) e o objeto (Funções e Sistemas de Equações).

No momento em que foram realizadas as primeiras tarefas, os alunos ainda se encontravam numa fase de conhecimento e apropriação do artefacto – instrumentalização, de acordo com o processo de Génese Instrumental (Rabardel, 1995). Nas tarefas seguintes, uma vez decorrido algum tempo de utilização do artefacto, os alunos apropriaram-se dele e de um modo geral conhecendo os seus constrangimentos e as suas potencialidades, adaptaram-no à resolução das tarefas propostas, encontrando-se assim numa fase de instrumentação.

O processo de Génese Instrumental foi-se desenvolvendo à medida que os alunos foram confrontados com novas situações, adaptando assim os esquemas já construídos anteriormente.

A análise das situações de trabalho promovidas pelos três grupos de alunos selecionados para o estudo de caso, sugere diferentes modos de utilização da calculadora gráfica, nomeadamente, para efetuar cálculos considerados mais complexos, para obter informação, para confirmar resultados e para explorar situações.

O seu uso foi considerado mais oportuno nos casos em que se partiu de uma expressão analítica e se pretendia a representação gráfica. Nos casos em que se partia do gráfico e se pretendia uma representação analítica, a resolução não passou propriamente pela calculadora, sendo esta utilizada como uma forma de confirmação ou verificação.

Perante a resolução de algumas tarefas que não haviam sido exploradas em sala de aula, as vias utilizadas foram diferentes, de acordo com o conhecimento e apropriação que os alunos já tinham do artefacto.

Importa ainda referir o papel desempenhado pela professora, um dos intervenientes que é visto como um elemento chave no processo de ensino e aprendizagem (Ponte 1994 b). Para além da preparação das aulas refletia sobre a forma como estas decorriam e questionava, muitas vezes, a escolha das tarefas e dos materiais de acordo com Fonseca, Brunheira & Ponte (1999).

Perspetivas de trabalho Futuro

Tendo presente que a abordagem das Funções e dos Sistemas de duas Equações do 1.º grau a duas incógnitas, através de várias representações e com recurso à calculadora gráfica proporcionou aos alunos do 8.º ano de escolaridade uma forma diferente de olhar estes temas, faria sentido continuar este estudo, acompanhando estes alunos, quer até ao final do 3.º ciclo, quer durante o Ensino Secundário.

Seria interessante compreender os efeitos que a utilização da calculadora gráfica durante o 3.º ciclo do Ensino Básico poderia trazer para o Ensino Secundário, onde tal ferramenta é considerada de uso obrigatório.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na Educação Básica.* Lisboa: ME/DEB.

Almeida, A., & Oliveira, H. (2009). O processo de génese instrumental e a calculadora gráfica na aprendizagem das Funções no 11.º ano. *Quadrante, Vol. XVIII, Nº1 e 2, XVIII*.

Alves, C., & Morais, C. (2006). Recursos de apoio ao processo de ensino e aprendizagem da matemática. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, & P. Canavarro, *Números e álgebra: na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 335-349). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação - Seção de Educação Matemática.

APM. (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e Recomendações sobre o Ensino e a Aprendizagem da Matemática.* Lisboa: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução á teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Canavarro, P., & Gafanhoto, A. (2008). *Representações múltiplas de Funções em ambiente com GeoGebra: um estudo sobre o seu uso por alunos de 9º ano.* Trabalho realizado no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática, com o apoio da FCT.

Caraça, B. (1951). *Conceitos fundamentais da matemática.* Lisboa: Gradiva.

Consciência, M. (2003). Calculadoras gráficas: Algumas limitações. *Gazeta da Matemática, nº145*.

Costa, A. F. (1986). A pesquisa de terreno em sociologia. In A. S. Silva, & J. M. Pinto, *Metodologia das ciências sociais* (pp. 129-148). Lisboa: Afrontamento.

DEB. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da Educação. Departamento do Ensino Básico.

DES. (1997). *Matemática - Programas 10.º, 11.º e 12.º anos.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

DES. (2001). *Matemática - Programas 10.º, 11.º e 12.º anos.* Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Dias, R. P., Prates, A., & Tavares, C. (2011). O pensamento algébrico no estudo das Funções no 10.º ano de escolaridade. *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, 166. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Doerr, H., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educacional Studies in Mathematics, 41*, pp. 143-163.

Domingos, A. (1994). *A aprendizagem de Funções num ambiente computacional com recurso a diferentes representações.* Tese de Mestrado. Universidade Nova de Lisboa.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados - a matemática no início do superior.* Tese de doutoramento não publicada, Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Domingos, A. (2011). A utilização de materiais electrónicos e os manuais escolares. *Educação e Matemática, nº1, 14*.

Domingos, A., & Teixeira, P. (2011). A utilização de materiais electrónicos e os manuais escolares. *Educação e Matemática nº114*, pp. 53-56.

Engestrom, Y. (1999). *Perspectives on Activity Theory.* New York: Cambridge University Press.

Fernandes, J., Martinho, M., Tinoco, J., & Viseu, F. (2013). *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Braga: APM & CIED da Universidade do Minho.

Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. (1999). As atividades de investigação, o professor e a aula de Matemática. *Atas do ProfMat 99*. Lisboa: APM.

Graham, T., Headlam, C., Honey, S., Sharp, J., & Smith, A. (2003). The use of graphics calculators by students in an examination: What do they really do? *International Journal of Mathematical Education in Science and Tecnology, 34 (3)*, pp. 319-334.

IAVE. (s.d.). Provas Finais e Testes Intermédios de Matemática. *Teste Intermédios*.

Kaput, J. (1999). Teaching and learding a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Edits.), *Mathematics classrooms that promete understanding* (pp. 135-155). Mathwah, NJ: Lawrence Eribaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Edits.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York: Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: Macmilliam Publishing Company.

Longo, E., & Branco, I. (2011). *Matemática Aplicada às Ciências Sociais- 11.º Ano.* Lisboa: Texto Editores.
ME. (2007). *Programa de matemática do ensino básico.* Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC. (disponível online).
NCTM. (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM (Original publicado em 2000).
Pereira, P., & Pimenta, P. (2011). *Xis 8 Matemática* (Vol. I). Lisboa: Texto.
Pires, M. (2011). Tarefas de investigação na sala de aula: Práticas de uma professora de Matemática. *Quadrante, Vol XX, Nº1*, pp. 31-53.
Ponte, J. (1990). *O conceito de Função no currículo da matemática.* Educação e Matemática, nº 15.
Ponte, J. (1992a). A modelação no processo de aprendizagem. *Educação e Matemática, 23*, pp. 15-19.
Ponte, J. (1992b). Problemas de Matemática e situações da vida real. *Revista de Educação Vol II, nº 2*, pp. 95-108.
Ponte, J. (1994). Matemática: uma disciplina condenada ao insucesso. *NOESIS (Instituto de Inovação Educacional, n.º 31*, pp. 24-26.
Ponte, J. (1994a). Matemática: Uma disciplina condenada ao insucesso. *NOESIS (Instituto de Inovação Educacional), Nº31*, pp. 24-26.
Ponte, J. (1994b). O desenvolvimento profissional do professor de matemática. *Educação e Matemática, 31*, pp. 9-12 e 20.
Ponte, J. (1994c). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, (3) 1*, pp. 3-18.
Ponte, J. (2005). Gestão curricular em Matemática. In G. (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.
Ponte, J. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, P. Canavarro, & (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.
Ponte, J. (2008). Investigar a nossa própria prática: Uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. *PNA-Revista de Investigación en Didática de la Matemática, 2 (4)*, pp. 153-180.
Ponte, J., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13 (2)*, pp. 51-74.
Ponte, J., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: DGIDC- ME.
Professores, d. (2010). Funções e Equações - 8º ano- Proposta de conjunto de tarefas para o 3º ciclo. dgidc.
Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies: une approche cognitive des instruments contemporains.* Paris: Armand Colin.
Rocha, H. (2013). A janela de visualização da calculadora gráfica nas propostas de trabalho de uma professora de matemática. *Atas do XXIV Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Braga: APM & CIEd da Universidade do Minho.
S-DGIDC. (2011-2013). Ofício circular. Lisboa: DSCD/JNE.
Semião, M., & Canavarro, A. (2012). A utilização da calculadora gráfica na aula de matemática: um estudo com alunos do 12.º ano no âmbito das Funções. In O. Magalhães, & A. Folque (Edits.), *Práticas de investigação em educação.* Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.
Stein, M., & Smith, M. (1998). Tarefas Matemáticas como quadro para a reflexão. *Educação e Matemática 105*, pp. 22-28.
Trouche, L. (2004). Managing the complexityof human/machine interactions in computerized learning environements: Guiding students command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9, 281-307.
Vygotsky, L. (1996). *A formação social da mente.* Rio da Janeiro: Martins Fontes.
Waits, B., & Demana, F. (2000). Calculators in mathematics teaching and learning: Past, present and future. In M. Burke (Ed.), *Learning Mathematics for New Century* (pp. 1-16). Reston: NCTM.

ANEXOS

Anexo I – Planificação

DOMÍNIO	CONTEÚDOS	METAS CURRICULARES	Nº DE AULAS 32
Funções, Sequências e Sucessões	**Gráficos de Funções afins** ⇨ Equação de reta não vertical e gráfico de Função linear ou afim; ⇨ Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical; ⇨ Relação entre declive e paralelismo; ⇨ Determinação do declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas; ⇨ Equação de reta vertical; ⇨ Problemas envolvendo equações de retas.	Identificar as equações das retas do plano (pág. 65) Resolver problemas (pág. 65)	**10**
Álgebra	**Equações algébricas** ⇨ Equação linear com uma incógnita; simplificação (parêntesis e denominadores) e caracterização do conjunto-solução; equações lineares impossíveis, possíveis, determinadas e indeterminadas; equação algébrica de 1.º grau; ⇨ Soluções exatas e aproximadas de equações algébricas de 1.º grau; ⇨ Problemas envolvendo equações lineares.	Resolver as equações do 1.º grau; (pág. 57) Resolver problemas. (pág. 57)	**12**
	Equações literais ⇨ Equações literais; ⇨ Resolução em ordem a uma dada incógnita de equações literais do 1.º e 2.º grau. **Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas** ⇨ Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas; forma canónica; soluções; sistemas ⇨ Interpretação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas; ⇨ Resolução de sistemas de duas equações de 1.º grau pelo método de substituição. ⇨ Problemas envolvendo Sistemas de Equações do 1.º grau com duas incógnitas.	Reconhecer e resolver equações literais em ordem a uma das incógnitas (pág. 68) Resolver sistemas de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas (pág. 68) Resolver problemas (pág. 68)	**10**

Anexo II – Solicitação de autorização à Direção da Escola

Exma. Srª.
Diretora do Agrupamento de Escolas do Algueirão

Eu, Luísa Adélia Lopes Fernandes, pretendo requerer a permissão de Vossa Excelência para a realização da minha investigação, no Agrupamento de Escolas no qual V. Ex.ª é Diretora.

A investigação "APRENDIZAGEM DAS FUNÇÕES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES NO 8.º ANO COM RECURSO À CALCULADORA GRÁFICA", realizada no âmbito do Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, na Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova de Lisboa, tem como objetivos:

- Identificar estratégias utilizadas e eventuais dificuldades manifestadas pelos alunos do 8.º ano de escolaridade na aprendizagem do conceito de Função bem como na resolução de Sistemas de Equações e sua aplicação;
- Analisar como os alunos se apropriam da calculadora gráfica e de que modo a utilizam;
- Compreender como a calculadora gráfica medeia a aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações.

A recolha de dados será realizada por mim e implicará:

– Observação de aulas;
– Recolha de documentos produzidos pelos alunos na realização de atividades;
– Descrição da experiência de ensino.

Informo que solicitei a colaboração da Professora Odete Oliveira para a implementação deste estudo numa das suas turmas, que, depois de tomar conhecimento das condições da realização aceitou colaborar.

Neste sentido, solicito a Vossa Excelência se digne autorizar a realização da recolha de dados, a partir desta data e até à data considerada pertinente.

Com os melhores cumprimentos

A Mestranda
Luísa Adélia Lopes Fernandes

Anexo III – Solicitação de autorização aos Encarregados de Educação

Pedido de Autorização

O meu nome é Luísa Adélia Lopes Fernandes, Professora da disciplina de Matemática, e, no âmbito do Mestrado, em Ensino de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e no Secundário, encontro-me a desenvolver uma investigação sobre *"Aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações no 8º Ano com Recurso à Calculadora Gráfica"*.
Os objetivos deste estudo são:

- Identificar estratégias utilizadas e eventuais dificuldades manifestadas pelos alunos do 8.º ano de escolaridade na aprendizagem do conceito de Função bem como na resolução de Sistemas de Equações e sua aplicação;
- Analisar como os alunos se apropriam da calculadora gráfica e de que modo a utilizam;
- Compreender como a calculadora gráfica medeia a aprendizagem das Funções e Sistemas de Equações.

Desta forma, solicito a sua colaboração, autorizando o seu educando a participar neste trabalho de investigação.

A Professora:
Luísa Adélia Lopes Fernandes

– –

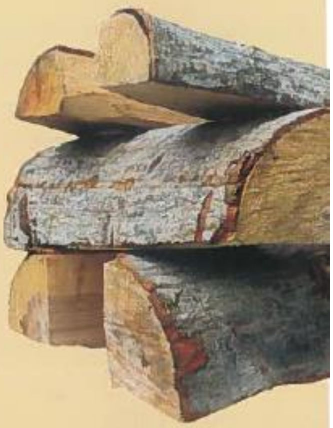
Autorizo / não autorizo o meu educando ____________________________________
a participar no trabalho de investigação anteriormente descrito.

O (a) Encarregado(a) de Educação: ____

Data: _____/_______/________

Anexo IV – Tarefa 1 – Encomenda de lenha (Página 100 do manual)

Tarefa 1: Encomenda de lenha



O sr. Teixeira dá assistência na manutenção de um condomínio.

Quando chega o inverno, o sr. Teixeira fica encarregue de encomendar a lenha para as lareiras das vinte habitações que fazem parte do condomínio. Encomendou dois tipos de lenha: lenha de carvalho e lenha de pinho. A relação entre o número de toneladas de lenha, t, e o preço total da lenha, em euros, p, é a seguinte:

Carvalho: $p = 90 \times t$
Pinho: $p = 70 \times t$

a. Um dos proprietários de uma das habitações quer 1,5 toneladas de carvalho e 0,5 toneladas de pinho. Quanto terá de pagar pela sua encomenda?

b. Outro proprietário comprou lenha de carvalho e uma tonelada de lenha de pinho, tendo pago 295 € pela sua encomenda. Quantas toneladas de lenha de carvalho encomendou?

c. A fatura enviada ao sr. Teixeira foi de 2500 €. Sabe-se que na encomenda o número de toneladas de lenha de carvalho é o dobro do número das de lenha de pinho. Quantas toneladas de cada tipo de lenha encomendou o sr. Teixeira?

d. O trator que transportava a lenha de pinho teve um acidente e perdeu parte da lenha. Uma vez chegado ao destino, a lenha teve de ser novamente pesada e, no final, o sr. Teixeira pagou ao vendedor 2325 €. Quantas toneladas de lenha de pinho se perderam, considerando que foram encomendadas 20 toneladas de lenha de carvalho e 10 toneladas de lenha de pinho?

e. Se se quiser gastar exatamente 164 € para pagar uma encomenda com 1,2 toneladas de lenha de carvalho, que quantidade de lenha de pinho se poderia encomendar?

f. A relação entre o número de toneladas de lenha de carvalho e o seu preço é uma relação de proporcionalidade direta? Justifica.

g. Que significado tem o parâmetro 70 na relação $p = 70 \times t$, atribuída ao preço da lenha de pinho?

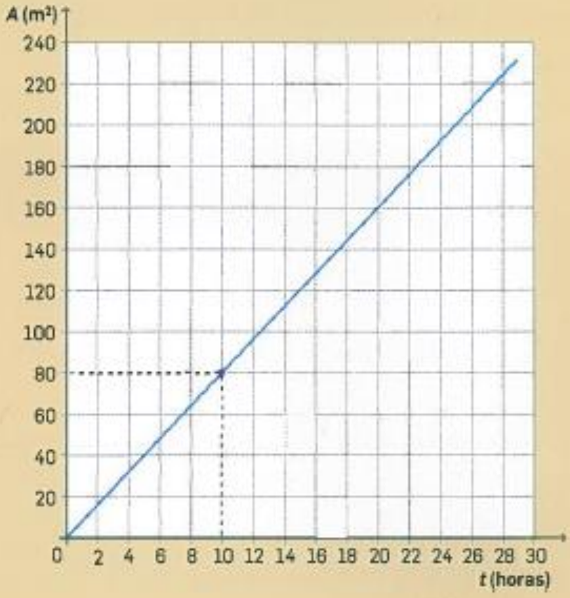
h. No final do inverno, o fornecedor de lenha faz um desconto de 20% em cada tonelada de lenha, quer seja de pinho, quer seja de carvalho. Escreve expressões analíticas representativas da relação entre o preço a pagar e as toneladas encomendadas de lenha de carvalho e de pinho.

Anexo V – Tarefa 2 – Pintura da habitação (Exercício 2, Página 101 do manual)

Tarefa 2: Pintura da habitação

Uma das habitações do condomínio do sr. Teixeira teve de ser pintada e, para tal, foi contratado um pintor.

1. Sabe-se que a área pintada da habitação, A, em m^2, é diretamente proporcional ao tempo, t, em horas, de trabalho do pintor. Essa relação está representada no gráfico seguinte.



a. Determina a constante de proporcionalidade.

b. Indica uma expressão analítica que defina a função representada graficamente.

c. Sabendo que a área da casa é de 240 m^2, quantas horas demorou o pintor a pintar a habitação?

d. O pintor trabalhava oito horas por dia. Que área se encontrava pintada ao fim de dois dias e quatro horas?

2. Na relação $P = 10 \times h$, P representa a quantia ganha, em euros, e h o número de horas de trabalho.

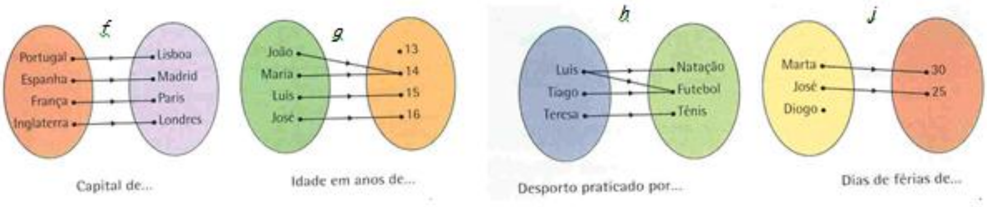
a. O que significa o parâmetro 10 nesta relação?

b. O primeiro pagamento recebido foi de 200 €. Nessa altura, que área da habitação já estava pintada?

c. Quanto pagou o proprietario da habitação pela sua pintura?

REVISÕES SOBRE FUNÇÕES

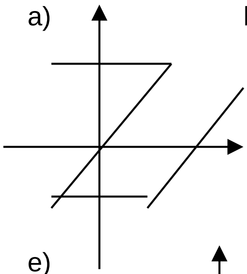
1. Observa as seguintes correspondências:

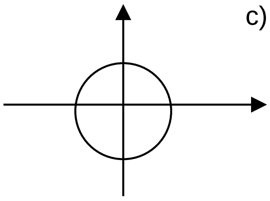


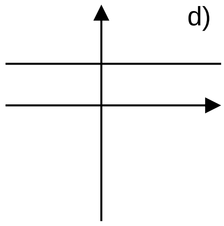
a) Indica, justificando, as correspondências que são Funções e as que não são Funções.

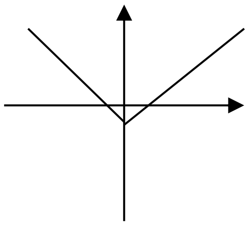
b) Indica o domínio, o conjunto de chegada e o contradomínio das correspondências que são Funções.

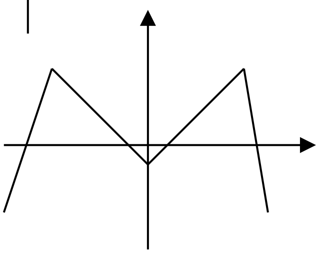
2. Diz, justificando, quais dos seguintes gráficos representam Funções:

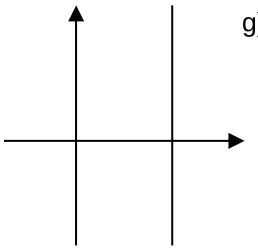
a)


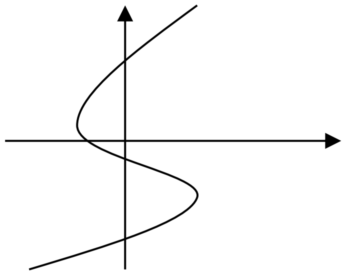
b)


c)


d)


e)


f)


g)


3. Um francês veio passar férias a Portugal e contactou a empresa GOZACAR com a finalidade de alugar um automóvel.

A empresa informou-o das condições de aluguer:

- Pagamento de 25 € por dia de aluguer do automóvel

a) Completa a tabela:

Número de dias	1	2	3	4	5
Pagamento (em euros)					

b) Qual a variável independente? E a variável dependente?

c) Indica a constante de proporcionalidade.

d) Escreve a Função que traduz esta situação de proporcionalidade direta.

e) Calcula o custo de alugar um carro durante 10 dias?

f) Um italiano pagou 150 euros pelo aluguer do carro, por quantos dias alugou o carro?

g) Representa graficamente a Função.

4. Considera a seguinte tabela:

Número de Pastilhas	2	3	4	5
Custo	€ 0,16	€ 0,24	€ 0,32	€ 0,40

a) Qual é a variável dependente e a independente para esta Função?

b) Esta situação é uma proporcionalidade direta? Indica a constante de proporcionalidade.

c) Escreve a expressão analítica desta Função.

d) Constrói o gráfico da Função.

e) Quanto custarão 20 pastilhas?

f) Com 2,80€ quantas pastilhas se podem comprar?

5. Considera a Função *g* definida pela expressão analítica: $f(x) = 5x$.

a) Qual é a imagem do objeto 2?

b) Calcula f(10).

c) Qual é o objeto que tem imagem 100?

d) Sabendo que f(x)=30, qual é o valor de x?

6. Considera a Função *g* definida pela expressão analítica: $g(x) = 2x + 3$.

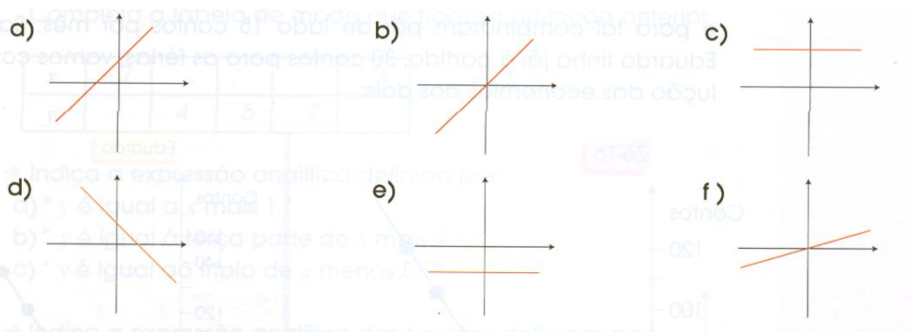
a) Qual é a imagem do objeto 2?

b) Calcula g(0).

c) Qual é o objeto que tem imagem 9?

d) Sabendo que g(x)=13, qual é o valor de x?

7. Observa os seguintes gráficos:

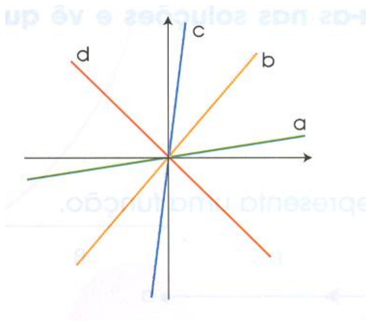


a) Indica os gráficos do tipo y = Kx , Função de proporcionalidade directa. Justifica.

b) Indica os gráficos do tipo y = Kx + b , Função afim. Justifica

c) Indica os gráficos do tipo y = b, Função constante. Justifica

8. Faz corresponder a cada gráfico a expressão analítica correta:



$$y=\frac{2}{3}x \quad , \quad y=5x \quad , \quad y=-x \quad , \quad y=x$$

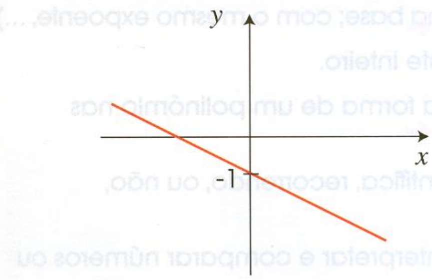
gráfico a $\longrightarrow$

gráfico b $\longrightarrow$

gráfico c $\longrightarrow$

gráfico d $\longrightarrow$

9. Observa o gráfico seguinte e indica a expressão analítica correspondente.



(A) $y = \frac{1}{2}x$

(B) $y = -\frac{1}{2}x$

(C) $y = -\frac{1}{2}x - 1$

(D) $y = -x + 1$

10. Considera as Funções:

$$y=2x \quad , \quad y=2x+1 \quad , \quad y=2x-3 \quad , \quad y=2x+5$$

Sem traçar os gráficos das Funções diz se representam retas paralelas ou não. Justifica a tua resposta.

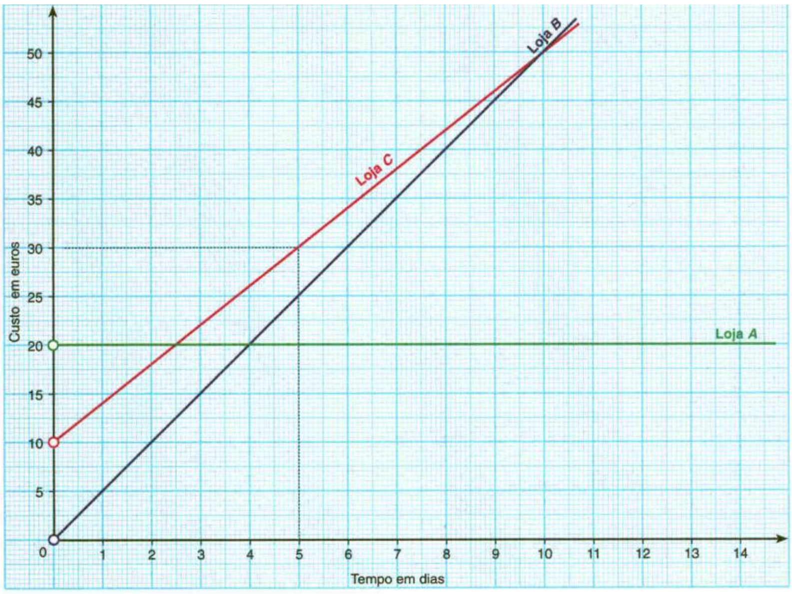
11. Escreve a expressão analítica das seguintes retas:

a) Tem declive –4 e ordenada na origem 1.

b) Tem declive 2 e passa no ponto (0,3).

c) Passa no ponto (0,4) e é paralela à reta de equação $y = -3x + 5$.

12. Existem três lojas A, B e C que alugam fatos de Carnaval. O gráfico indica o custo de aluguer de um fato de “Zorro”:



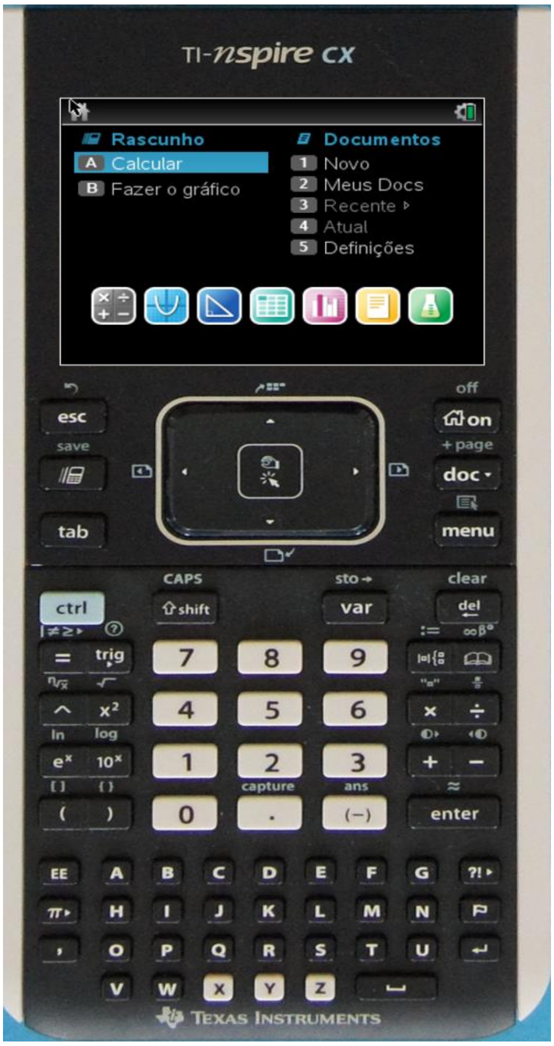
a) Completa a tabela:

Número de dias de aluguer	**Custo**		
	Loja A	**Loja B**	**Loja C**
1			
2			
5			

b) Escreve um modelo matemático para cada uma das três Funções representadas graficamente e classifica cada uma das Funções.

c) Calcula o custo do aluguer de um fato de “Zorro” por 12 dias em cada uma das lojas.

Anexo VII – Apresentação da calculadora gráfica utilizada na sala de aula, *TI- Nspire*



Anexo VIII – TAREFAS MATEMÁTICAS (1)

1. O Francisco quer instalar internet em sua casa e, por isso, consultou o preço de três empresas:

- **Empresa A:** cobra uma mensalidade fixa de 30 euros.
- **Empresa B:** cobra uma tarifa mensal de 5 euros com um acréscimo de 2 euros por cada hora de utilização.
- **Empresa C:** cobra 3 euros por cada hora de utilização.

O Francisco fez uma estimativa do tempo que utilizaria a internet por mês e verificou que seriam cerca de 20 horas.

a) **Completa** a tabela, considerando o tarifário de cada uma das empresas.

		TEMPO (horas)				
		0	**5**	**10**	**15**	**20**
EMPRESA	**A**					
	B					
	C					

b) Qual o preço a pagar pelo Francisco, se pretender utilizar a internet durante 10 horas e meia, optando pela empresa A? E se optar pela empresa B? E pela empresa C?

c) Sabendo que o Francisco só tem 12 euros disponíveis para a utilização de internet, qual das empresas aconselharias?

d) **Escreve** uma expressão algébrica que represente cada uma das Funções.

e) **Constrói**, no mesmo sistema de eixos coordenados, os gráficos representativos das mensalidades a pagar para cada uma das empresas.

f) Numa pequena composição, **explica** qual a empresa que disponibiliza as melhores condições.

EXPLORAÇÃO DE FUNÇÕES COM CALCULADORA GRÁFICA

1. Desenha num referencial os gráficos das seguintes Funções, do tipo ***y = a x***:

y = x　　y = 2 x　　y = 5 x　　y = 0,5 x　　y = 10 x

Compara os gráficos e escreve:

- As características de uma Função linear, do tipo ***y = a x.***
- A relação da inclinação das retas com o coeficiente de x (valor de ***a***).

2. Desenha num referencial os gráficos das seguintes Funções, do tipo ***y = -a x***:

y = -x　　y = -2 x　　y = -5 x　　y = -0,5 x　　y = -10 x

Compara os gráficos e escreve:

- As características de uma Função linear, do tipo ***y = -a x.***
- A relação da inclinação das retas com o coeficiente de x (valor de ***a***).

3. Desenha num referencial os gráficos das seguintes Funções, do tipo ***y = b***:

y = 3　　y = 5　　y = -1　　y = 8　　y = -3

Compara os gráficos e escreve:

- As características de uma Função constante.
- A relação da posição das retas com o valor de ***b***.

4. Desenha num referencial os gráficos das seguintes Funções, do tipo ***y = 2 x + b***:

y = 2 x　　y = 2 x + 2　　y = 2 x + 5　　y = 2 x - 3

y = 2 x -8

Compara os gráficos e escreve:

- As características de uma Função afim.
- A relação da inclinação das retas entre si e com o coeficiente de x.
- A relação da posição das retas com os valores de ***b***.

5. Desenha num referencial os gráficos das seguintes Funções, do tipo ***y = a x + 2***:

y = x + 2　　y = 2 x + 2　　y = 4 x + 2　　y = 8 x + 2

y = -4 x + 2

Compara os gráficos e escreve:

- As características de uma Função afim.
- A relação da inclinação das retas com o coeficiente de x (valor de ***a***).
- A relação da posição das retas com o valor de ***b***.

Anexo X – Ficha de Trabalho – Sistemas de Equações

SISTEMAS DE EQUAÇÕES

RELEMBRA:

1º passo – Escolher uma equação e uma incógnita e resolver essa equação em ordem a essa incógnita.
2º passo – Substituir o valor dessa incógnita na outra equação
3º passo – Resolver essa segunda equação até encontrar o valor dessa incógnita. (se possível)
4º passo – Substituir o valor obtido no passo anterior na outra equação e encontrar o valor da outra incógnita
5º passo – Encontrar a solução do sistema de equações.

1. Averigua se algum dos pares $(3;2)$) e $\left(\frac{1}{2};-3\right)$ é, ou não, solução do sistema:

$$\begin{cases} x-2=\frac{y}{2} \\ 2x-3y=10 \end{cases}$$

2. Determina a solução de cada um dos sistemas seguinte, apresentando todos os passos da sua resolução:

a) $\begin{cases} x=y+10 \\ x+y=20 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x=y+10 \\ x+y=20 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3x+2y=18 \\ 5x-y=17 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+3y=1 \\ 3(x+y)=2 \end{cases}$ **e)** $\begin{cases} 6x+8y=-5 \\ 2x-4y=5 \end{cases}$ **f)** $\begin{cases} 2(x-1)-y=10 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{4}=2 \end{cases}$

Anexo XI – Ficha de Trabalho – Problemas e Sistemas de Equações

Etapas para a resolução de problemas:

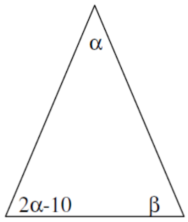
- Ler e compreender o problema;
- Identificar a incógnita;
- Traduzir o problema por meio de um sistema;
- Resolver o sistema;
- Verificar se a solução do sistema serve como solução do problema;
- Dar resposta ao problema.

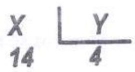
1. Na praceta do André estão estacionados automóveis e motos. Sabendo que há 40 rodas e que o número de automóveis é o dobro de motos, determina quantos automóveis e quantas motos estão estacionadas nessa praceta.

2. Um pai te o triplo da idade do filho. A diferença entre a idade do pai e o quádruplo da idade do filho é 4 anos. Que idade tem cada um?

3. Ao adicionarmos 5 à terça parte da soma de dois números, obtivemos 10 e verificámos também que metade do maior excede o menor em 3 unidades. Com que números trabalhamos?

4. Calcula o valor de α e β de modo que o triângulo da figura seja isósceles.



5. Sabe-se que 

Determina os valores de x e y, sabendo que a sua soma é igual a 94.

6. A diferença das idades de dois irmãos é 10. A idade do mais velho é igual ao dobro da idade que o mais novo terá daqui a 10 anos. Qual é a idade de cada um?

7. A soma do dinheiro da Ana com o dinheiro do Alexandre é de 13€. A Ana tem mais três euros do que o Alexandre.

a) Depois de ter lido o texto escreveu-se o seguinte sistema: $\begin{cases} x+y=13 \\ x-3=3 \end{cases}$

O que representa a letra x e a letra y, no contexto do prolema?

b) Determina quanto dinheiro tem a Ana.

c) O Alexandre quer comprar um CD que custa 4,55€. Terá dinheiro suficiente para efetuar a compra? Justifica a tua resposta.

Anexo XII – TAREFAS MATEMÁTICAS (2)

Tarefa 1

Para medir a temperatura, podem utilizar-se termómetros graduados em graus Celcius ou termómetros graduados em graus Fahrenheit.

Para relacionar graus Celsius com graus Fahrenheit, utiliza-se a fórmula $F = 1{,}8C + 32$,

em que C representa o valor da temperatura em graus Celsius e F representa o correspondente valor em graus Fahrenheit.

a) Determina o valor da temperatura, em graus Fahrenheit correspondente a -25 graus Celsius.

b) Determina o valor da temperatura, em graus Celsius, correspondente a 95 graus Fahrenheit.

Mostra como chegaste à tua resposta.

c) Nem o gráfico A, nem o gráfico B traduzem a relação $F = 1{,}8C + 32$

Apresenta uma razão para rejeitar o gráfico A e uma razão para rejeitar o gráfico B.

Gráfico A

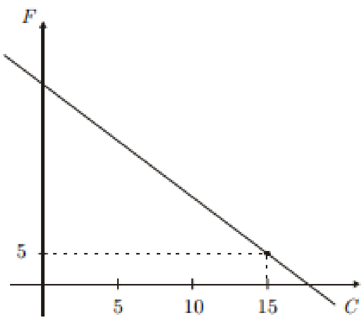
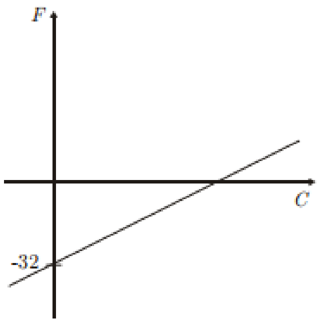


Gráfico B



Teste intermédio de matemática do 9º ano, Maio 2010

Tarefa 2

Uma escola tem apenas turmas do 5.º ano e turmas do 6.º ano de escolaridade.

Sabe-se que:

- todas as turmas do 5.º ano têm o mesmo número de alunos;
- todas as turmas do 6.º ano têm o mesmo número de alunos.

Seja *x* o número de alunos de cada turma do 5.º ano e seja y o número de alunos de cada turma do 6.º ano.

a) Admite que a escola tem quatro turmas do 5.º ano e cinco turmas do 6.º ano.

O que representa a expressão 4x+5y, no contexto da situação descrita?

b) Sabe-se que:

- uma visita de estudo que inclua todos os alunos de uma turma do 5.º ano e todos os alunos de duas turmas do 6.º ano terá a participação de 67 alunos;

- uma visita de estudo que inclua todos os alunos de duas turmas do 5.º ano e todos os alunos de uma turma do 6.º ano terá a participação de 71 alunos.

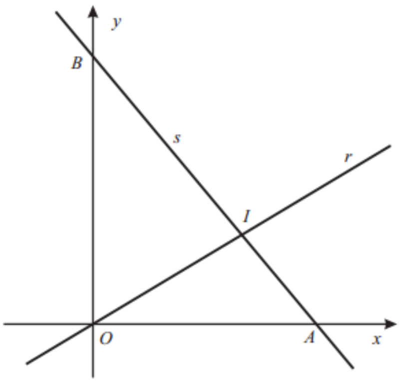
Escreve um sistema que permita determinar o número de alunos de cada turma do 5.º ano (valor de x) e o número de alunos de cada turma do 6.º ano (valor de y).

Não resolvas o sistema.

Teste intermédio de matemática do 9º ano, Maio 2011

Tarefa 3

Na figura estão representadas, num referencial cartesiano, as retas ***r*** e ***s***.



Sabe-se que:

- A reta r é definida por $y = 0{,}6x$
- A reta s é definida por $y = -1{,}2x + 4{,}5$
- O ponto A é o ponto de interseção da reta s com o eixo das abcissas
- O ponto B é o ponto de interseção da reta s com o eixo das ordenadas
- O ponto I é o ponto de interseção das retas r e s

a) Qual é a ordenada do ponto B?

b) Qual é a medida do segmento de reta [AO]?

(A) 3,5

(B) 3,75

(C) 4,5

(D) 4,75

c) Determina, analiticamente, as coordenadas do ponto **I**.

d) Determina a área do triângulo [AIO].

Adaptado do Teste intermédio de matemática do 9º ano, 2012

Tarefa 4

Na tabela seguinte registou-se a contagem mensal do número de animais de uma certa espécie, existentes numa área reservada desde a sua criação:

Número de meses decorridos desde a criação da área reservada (x)	Número de animais existentes na área reservada (y)
0	10
1	12
2	13
3	16
4	18
5	24
6	25
7	30
8	36
9	42
10	45
11	50
12	54

a) De acordo com a tabela, durante quanto tempo foi feita a recolha de dados?

b) Represente os dados da tabela através de uma nuvem de pontos.

c) Com o auxílio da calculadora gráfica, determine o modelo de regressão linear, de equação $y = ax + b$, que se ajuste à nuvem de pontos da alínea anterior. Indique os valores de ***a*** e ***b*** com aproximação às centésimas.

d) Segundo o modelo determinado, qual é a previsão para o número de animais existentes na reserva ao fim de 2 anos?

Retirado do manual de Matemática Aplicada às Ciências Sociais 11º ano- Texto Editora

Anexo XIII – TAREFAS MATEMÁTICAS (3)

Tarefa 1

Por simples observação, é possível ver qual é a solução do sistema: $\begin{cases} 2a + b = 3 \\ a - b = 0 \end{cases}$

Explica o teu raciocínio.

Adaptado de Funções e Equações - 8º ano - Proposta de conjunto de tarefas para o 3º ciclo (2010) - DGIDC

Tarefa 2

Num referencial, traça a reta **y=2x+1**.

a) Traça outra reta de modo que o sistema constituído pelas equações dessas retas seja um sistema impossível.

b) Que alteração deverás fazer à reta traçada para encontrar um sistema possível e indeterminado?

c) Procede de modo análogo, de forma a obteres um sistema possível e determinado e explica como pensaste.

Adaptado de Funções e Equações - 8º ano - Proposta de conjunto de tarefas para o 3º ciclo (2010) - DGIDC

Tarefa 3

Sendo x e y o comprimento e a largura de um retângulo, respetivamente, elabora o enunciado do problema correspondente ao sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 16 \\ y = \frac{3}{5}x \end{cases}$$

Adaptado de Funções e Equações - 8º ano - Proposta de conjunto de tarefas para o 3º ciclo (2010) - DGIDC

Tarefa 4

a) Considera dois pontos de uma determinada reta (reta r).

b) Considera a reta que passa por esses dois pontos e escreve a expressão analítica que define essa reta.

c) Considera dois pontos para outra determinada reta (reta s).

d) Considera a reta que passa por esses dois pontos e escreve a expressão analítica dessa reta.

e) Escreve o sistema de duas equações a duas incógnitas que essas duas retas sugerem.

f) Qual a solução do sistema formado pelas reta que encontraste nas alineas anteriores.